本书获全国优秀科普作品奖



Dashi

数学大师启示录

Shuxuedashiqishilu

MATHEMATICS

陈诗谷　葛孟曾 著



- 荣获全国优秀科普作品
- 入选中学语文自读课本
- 彰显国家新颁课程标准
- 演绎数学大师精彩人生

开明出版社

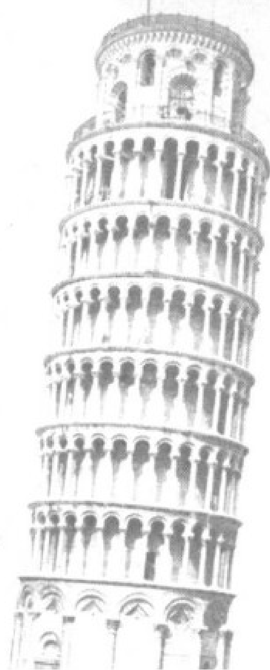
本书获全国优秀科普作品奖



数学大师启示录

MATHEMATICS

陈诗谷　葛孟曾 著



荣获全国优秀科普作品
入选中学语文自读课本
彰显国家新颁课程标准
演绎数学大师精彩人生

开明出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学大师启示录/陈诗谷,葛孟曾著. -北京:开明出版社,
2005.1
ISBN 7-80133-824-3

Ⅰ.数… Ⅱ.①陈… ②葛… Ⅲ.数学家一生平事迹一世界 Ⅳ.K816.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第104894号

责任编辑: 刘维维
封面设计: 羽人创意设计中心

数学大师启示录

编著 陈诗谷 葛孟曾
出版 开明出版社(北京海淀区西三环北路19号)
印刷 保定市印刷厂
发行 新华书店北京发行所
开本 880×1230毫米 大1/32开 印张14.75 字数394千
版次 2005年1月第1版 2005年1月第1次印刷
书号 ISBN 7-80133-824-3
印数 00 001-5000册
定价 20.00元

内容简介

本书介绍从阿基米德、牛顿、高斯到希尔伯特和华罗庚等21位中外大数学家的生平和贡献，对达朗贝尔和陈景润等近10位相关数学家也有着力描述。既有史料知识、趣闻轶事和栩栩如生的人物刻画，又深入浅出地揭示近代数学思想的产生和发展。本书初版曾获全国优秀科普作品奖，其中“恼人的平行公理”一节入选初中语文自读课本。再版增加庞加莱、希尔伯特和华罗庚三章，从而较完整地勾勒出世界和中国数学史发展的足迹。

初版序言

数学是人们所熟悉的科学。随着现代科学技术的迅猛发展，作为研究数量关系和空间形式的数学，不仅在力学、物理学，而且在化学、生物学，甚至社会科学的许多领域，都起着重要的作用。正像马克思所指出的，一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。社会主义四个现代化必然推动数学发展；同时数学的发展，也必然推动“四化”的前进。

学习数学需要了解数学家。本书通过从阿基米德到黎曼等18位西方著名数学家的生平，以辩证唯物主义、历史唯物主义的观点和生动的文字，再现了数学史上一些激动人心的事件；介绍了重要数学成果的诞生过程，它的时代背景和历史意义；同时，分析了数学家得以成才的个人素质和社会条件。这些数学先驱者的活动构成了一部形象生动的数学发展史，从中不难看出数学发展的历史足迹。书中既有理论分析和知识介绍，又有饶有兴味的趣闻轶事，使人读来兴趣盎然，相信会受到青少年读者的欢迎。

本书未包括的西方著名数学家，在黎曼以后的有：康托尔、庞加莱、希尔伯特乃至更晚近的嘉当、外尔、冯·诺伊曼等人，也希望能在普及读物中介绍他们。还希望能在普及读物中介绍我国数学家的生平事迹。

相信通过现代青年人的努力，在21世纪，中国定能再次站在世界数学发展的前沿。

江泽涵

1986年6月

再版序言

本书记叙了数学史上意义重大的人和事。科学技术的发展已经证明，这些人和事对人类影响深远。作者在论述近代数学产生和成长时，对基本概念有精当的说明；注意揭示数学现象之间的内在联系（如代数方程、尺规作图与群论）；更强调用数学认识世界服务社会的根本意义。作者对大师们美好人生追求的讴歌，抒发了领略过数学中甘苦的每位数学工作者的心声。数学界热切希望加强普及工作，让公众对数学和数学家有更多的理解和支持，使数学在振兴中华造福人类中发挥更大的作用。

此书再版加写了庞加莱、希尔伯特和华罗庚三位，令人高兴。希望今后对晚近数学家有更多的介绍。

中国科学院院士
第三世界科学院院士
姜伯驹

前言　数学长河古今一脉

1742年6月7日，普鲁士驻俄罗斯公使、德国数学家哥德巴赫（1690-1764）在给友人欧拉的信中，提出一个猜想："大于5的任何整数是3个素数①的和。"他就自己这个大胆猜测，请教这位当代最杰出的数学家。经过20多天的思考，欧拉回信答复他的老友："每个偶数都是两个素数之和，我虽然还不能证明，但是确信这个论断完全正确。"当时把1也算素数，所以欧拉这么说。按后来的说法，就是"每个大于5的偶数都可表示为两个奇素数之和。"欧拉，这位数学史上和阿基米德、牛顿、高斯齐名，解决了大量难题的科学巨擘，最终也没有证明这个后人所谓的哥德巴赫猜想。虽然许多数学家继续努力，一个多世纪过去了，哥德巴赫猜想的证明进展甚微。

1900年巴黎国际数学家大会上，在数学的许多分支都有重要贡献的德国大数学家希尔伯特提出有名的23个难题，把哥德巴赫猜想放在关于素数研究的第8题。作为数论的一个重要问题，20世纪许多著名数学家都曾致力于哥德巴赫猜想的研究。英国数学大师哈代②认为这个问题困难的程度可以与任何未解决的数学问题相比。德国数论权威朗道（1877-1938）甚至说，即使证明比它弱的命题也不是他同时代的数学家力所能及的。可是从20年代起，这个问题的研究不断取得进展，并且在这一过程中创造了一些对许多数学分支都有很大影响的数论方法。以华罗庚为首的中国数论专家们在这方面作出了很大贡献。他们的一系列研究成果

① 素数也称质数，指大于1而除它本身与1以外不能被其他正整数整除的整数。

② 戈弗雷·哈罗德·哈代（1877-1947）在解析数论、调和分析上有重大贡献。

达到世界先进水平，得到国内外同行的普遍赞赏。数论的一些著名问题也为不少非数学专业的学者所熟悉了。

1948 年，空气动力学家沈元偶尔有机会到福州英华书院讲授数学，向高中学生介绍了哥德巴赫猜想。有个孩子听了特别振奋，决心献身数学，为解决这个难题而奋斗。他就是后来考入厦门大学数理系的陈景润。

1963 年陈景润在整点问题①上有所收获，使他的名字在权威的日本岩波数学百科辞典上和华罗庚并列。对抱有崇高目标的陈景润，这个荣誉不过是小小的起步。他继续奋勇前进，跻身于数学大军的先进行列，逼近哥德巴赫猜想的证明。1966 年初，他关于哥德巴赫猜想的研究有了突破。同年 5 月，在中国科学院的《科学通报》上简要报导了他的初步成果。正在这时，中国爆发了一场史无前例的政治动乱。就在那极端困难的环境中，陈景润坚持研究。终于在 1973 年修订发表了他的论文《大偶数表为一个素数及一个不超过二素数的乘积之和》。这下轰动了国际数学界，它被认为是这项研究 224 年以来最好的成绩。一位英国数学家写信称赞他“移动了群山”。有人甚至说，摘取数学王冠上这颗明珠“只差最后一步了”！看到陈景润的论文，英国数学家哈贝斯坦和德国数学家黎切特认为这是“筛法的顶点”，立即把他们排印中的数论专著《筛法》一书增添了第 11 章——“陈氏定理”，基本上全文转载了陈景润的论文。许多国家的学术刊物报导了陈景润这一成果。

陈景润的成就鼓舞了海外同行，更深深地激励着国内同胞。他的成就对于中国人民，犹如划破夜空的一道闪电，驱走严寒的一声春雷，预示着科学的春天即将来临。年轻的读者大概想不到，20 世纪中国大地上激动人心的一幕，却和 2000 多年前古希腊一位学者有联系。上面提到的数学家们专书论述的“筛法”，是在

① 整点指坐标为整数的点。整点问题是数论研究的一类问题。

研究哥德巴赫猜想中发展起来的一种近代数论的高深方法，由著名数学家布龙和塞尔贝格[①]开始使用，又被陈景润等人发扬光大。和它相关的一种朴素的想法却产生于公元前200多年的古希腊。那是个发达的奴隶社会，在地中海沿岸许多城邦有繁荣的工商业。希腊人吸取了巴比伦、古埃及和亚洲各国人民的成就，创造了光辉灿烂的古希腊文明，对以后人类科学文化有重大影响。希腊几何学是古代数学最杰出的代表。名垂千古的欧几里得（约前330-前275）《几何原本》的光辉，2000多年来照耀着青少年学习数学的道路。后世的许多数学思想可以在古希腊学者那里找到它们的雏形。"筛法"也可以溯源于亚历山大城[②]的天文学家、地学家厄拉多塞（约前275-前194）想出来的一种找素数的方法。用厄拉多塞的"筛法"可以从小到大逐个找出素数。先依次写出自然数。而后划去1保留2；再划去比2大的所有2的倍数，保留3；再划去比3大的所有3的倍数，保留5；再划去比5大的所有5的倍数，保留7；……这样"过筛"以后留下的就是如下的素数列：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42
43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 ……

表示一切素数的公式即使存在，世人还没有找到。用厄拉多塞的筛法，人们已经编出很好的计算机程序，得到10亿以内的素数。

厄拉多塞是历史上第一位大地学家。他首次相当精确地测算出地球的大小：直径约合12 800公里；在他流传后世的著作《地

---

① 阿特尔·塞尔贝格（1917-　）是美籍挪威数学家，在数论、群论和调和分析上都有重要成就，1950年获菲尔兹奖。

② 亚历山大城，公元前332年由马其顿国王亚历山大大帝在古城拉库提斯基础上扩建而成，规模超过迦太基，一度成为希腊文化中心，现为埃及第二大城市和主要海港，临地中海，在尼罗河三角洲西缘。

理学》中，还记录了太阳同地球的距离、黄道[1]和赤道交角等量的测算结果，并且用经纬线绘制地图。除了天文地理，厄拉多塞在数学、哲学、诗歌、文学和历史等方面都有成就，被认为是最有学问的人之一。当然，他渊博的学识是长期勤奋学习的结果。他小时候曾经在雅典的柏拉图学园学习，后来到当时科学文化中心亚历山大城深造，并且定居下来。不久，他成为亚历山大学界领袖之一，被当时的马其顿人埃及国王托勒密三世委任为图书馆馆长。亚历山大图书馆是古代最大的图书馆，藏书一度达到 75 万册之多。它后来毁于战火，这可说是历史上最大的文化浩劫之一。厄拉多塞年轻的时候就是图书馆最热心的读者，经常在闭馆以后被管理人员连催带赶才离开。有一天傍晚，厄拉多塞意外地发现，除他以外竟还有另一位读者在书山面前流连忘返，就禁不住走过去打招呼。结识志同道合的朋友是令人高兴的事啊！原来，这位"书迷"就是后来历史上大名鼎鼎的阿基米德。这次邂逅以后，两人果然结为终生挚友。这个长着一头乌发、身材修长的阿基米德是从哪儿来的？他到亚历山大城来做什么？我们数学家故事就从这里开始吧！

① 黄道指太阳一年在星座中穿行的视轨迹的大圆，也就是地球围绕太阳运行的轨道在天球上的投影。

Contents

目 次

前言 数学长河古今一脉

阿基米德 …………………………………………………… 1

故乡启蒙/1 渡海求学/4

古希腊群星璀璨/6 新的高峰/9

理论物理的缘起/13 保卫叙拉古/16

惦念着“谜”和“题”/19

笛卡儿…………………………………………………… 24

数学史上的伟大转折/24 小哲学家/25

拉弗莱舍/27 寻找真理/29

三个奇怪的梦/30 我只要安静和休息/33

这,就是我的书/35 教皇和哥白尼/36

《方法谈》问世/39 告别荷兰/42

最后的磨难/44

帕斯卡和费马………………………………………… 47

出类拔萃/47 神秘六边形/48

双重折磨/51 皮埃尔·费马/53

涓涓细流/60 智者千虑必有一失/62

走向终点/63

牛顿…………………………………………………… 65

自然科学家的偶像/65 心灵手巧/66

振聋发聩/68 在暴风雨中/69

重返格兰瑟姆/70 剑桥的减费生/72

划时代的发现/75 神圣时刻/79

引力之谜的思考/81 卢卡斯讲座的青年教授/83

踟蹰迷津/87 自然哲学的数学原理/89

别了,剑桥/93 真理的大海之滨/96

莱布尼兹 …… 100
由远而近的马车/100　少年在沉思中/100
宏大理想/102　马车上的学者/104
名师指路/106　微积分的发明/107
计算机先驱/111　不幸的争论/113
失意的晚境/115
欧拉 …… 118
英雄世纪的数学英雄/118　不解之缘/119
在彼得堡/123　柯尼斯堡七桥/126
晴天霹雳/128　在柏林/129
无法容身/133　重返彼得堡/134
参天大树/137　前进吧，前进将使你产生信念/139
拉格朗日 …… 142
数学科学的一座巍峨的金字塔/142　心灵的召唤/143
挑战/146　征服/148
达朗贝尔/150　捷报频传/152
我不知道/154　婚事/156
造了，拆掉，再造/157　理想实现了/159
严酷的冬天/162　重新燃起心中的火焰/164
这样的结束是不错的/166
蒙日和傅里叶 …… 169
传奇式的少年/169　不速之客/172
军事机密/175　巧结良缘/177
在革命的洪流中/178　拿破仑的好友/181
真羡慕你啊，我亲爱的同事/183　现在，我知道我将怎样病死/184
拿破仑的另一位朋友/186
拉普拉斯 …… 192
为了揭开宇宙之谜/192　天体力学/194
否则将更伟大/197　卷入政治漩涡/199
我不需要那个假设/201
高斯 …… 204
新的数学发展高潮/204　小木屋里飞出了金凤凰/205
早熟的童年/206　初露头角/207
良好的开端/209　喜从天降/211

错失良机/214　转折点/216
宁少毋滥/219　灵感仅赐福于有心之人/222
披荆斩棘/224　加七道封漆的著作/227
神秘的小星/230　短暂的春天/232
忍辱负重/236　向传统挑战/238
硕果累累/241　安静的晚年/243

柯西 …… 246

饥饿的童年/246　大数学家和小柯西/247
这少年将替代我们/251　在瑟堡/253
牛刀小试/255　滔滔大江/256
节日的盛会/259　严格微分学的奠基者/259
流亡国外/263　拔河比赛/265
人死了,但事业永存/267

罗巴切夫斯基 …… 269

几何学的哥白尼/269　到喀山去/270
一身数任/271　恼人的平行公理/273
石沉大海/276　多灾多难/279
疾风知劲草/280　悲苦的纤夫/282

阿贝尔 …… 286

脚踩两个怪物的大力士/286　憧憬未来/287
一个优秀的数学天才/288　初生牛犊不怕虎/290
深情厚谊/292　哥本哈根之行/294
成功和失望/295　喜遇"伯乐"/298
喧闹的"沙漠"/301　迟到的正义/304

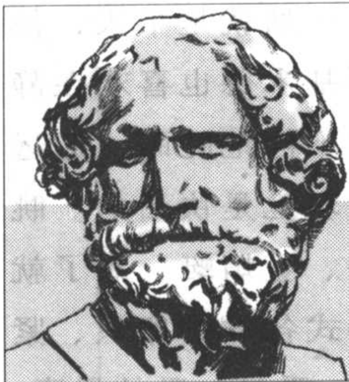
伽罗瓦 …… 309

湖畔枪声/309　从莱茵堡到路易皇家学校/310
迷上了数学/311　法兰西的阿贝尔/313
明珠暗投/314　在革命急流中/319
最后一夜/323　巨大反响/327

维尔斯特拉斯 …… 329

分析算术化的过程开始了/329　早年的波折/330
良师指路/333　只问耕耘/336
一朵浪花/339　迟到的春天/340
教师典范/342　最宠爱的女弟子/345
尾声/348

黎曼 …… 351
最美妙的对比/351
在罗尼堡/353
大学生活/355
博士论文/358
意外的挑选/360
历史性的演讲/361
黎曼几何/364
为了人类的幸福/366
庞加莱 …… 369
有生理缺陷的孩子/369
走上追求真理之路 371
漫漫求索/373
独辟蹊径/375
拓扑创新/376
沉思物理/378
坦言心声/381
勉力负重/382
鞠躬尽瘁/384
希尔伯特 …… 386
乡村法官的儿子/386
知心朋友/387
苹果树下/389
访师游学/390
哥尔丹问题/391
代数数论/394
桌子、椅子、啤酒杯/397
妙手回春/398
揭开新世纪的面纱/400
快乐时光/402
打起你的背包,到格丁根去/404
悲情时刻/406
反对战争/408
爱米·诺特/411
理性的呼唤/413
柯尼斯堡的荣誉市民/414
回荡的笛声/416
华罗庚 …… 419
学校和恩师/421
发奋自学/422
大病致残/424
峰回路转/425
游龙归海/427
名声鹊起/430
攀登新高峰/432
艰苦岁月/434
战火中的珍珠/435
访问苏联/437
赴美考察/438
报国心切/440
万紫千红才是春/442
播撒种子/443
哥德巴赫猜想/445
我不能在干扰中躺倒不干/449
春回大地/451
最后时刻/454
再版后记 …… 456



阿基米德

（前287—前212）

如果不知道远溯古希腊各代前辈所建立和发展的概念、方法和结果，我们就不可能理解近50年来数学的目标，也不可能理解它的成就。

——海尔曼·外尔①

故乡启蒙

在波浪滔滔的地中海上，有一颗美丽的珍珠，那就是由希腊移民在西西里岛上建立的城邦叙拉古。这里气候宜人，土地肥沃，交通便利，经济相当繁荣。公元前287年，传奇般的巨人、古代最伟大的数学家和物理学家阿基米德，就出生在叙拉古的一个贵族家庭。他的父亲菲狄阿斯是位天文学家，和叙拉古国王（僭主）希伦二世有点亲戚关系。菲狄阿斯终生研究日月之间的距离，可惜没有结果。阿基米德8岁上学，除了和许多男孩一起受到严格的体育和智育训练以外，还有个专门的奴仆照料他的生活，向他灌输当时的思想道德观念。阿基米德默默地听从这个卑微的老师的教导，认真学习荷马史诗、伊索寓言②和其他的社会伦理著作。不过，他对它们的兴

---

① 海尔曼·外尔(1885-1955)是德国数学家，在分析、拓扑和微分几何都有重大贡献，特别关于李群、黎曼曲面的研究影响深远。他首先提出的规范场，对理论物理发展有重要促进。

② 荷马史诗指古希腊盲诗人荷马（约前9世纪）所作长诗《伊利亚特》和《奥德赛》；伊索寓言是相传为公元前6世纪希腊奴隶伊索所编寓言故事集。二者都是古希腊文学经典，对西方文学艺术有深远影响。

趣似乎很有限。他时常在石子和沙盘跟前琢磨，一站就是半天；他觉得在数和形的世界里遨游要有意思得多。小阿基米德也喜欢在静谧的夜晚跟着爸爸去观察天象。小星星向小家伙不停地眨眼，遥远的天穹传来的信息多么神秘而迷人啊！到海边去玩也是快活的。眺望无边的大海，使他心旷神怡。在沙滩上翻跟头、竖蜻蜓，累了就趴在松软的沙土上，看着那热闹繁忙的码头。各式各样的船只、紧张操作的水手和吃力负重的搬夫激起小阿基米德一番又一番的思索。满载货物的大船为什么不沉？船上的风帆最好做成什么形状？这些问题在今天已经不是难题。可是在阿基米德小时候，要回答它们就不简单了。因为当时不但没有坐标法，也不懂微积分，就连浮力定律还是阿基米德长大以后才发现的。人类对自然和社会的认识是逐渐积累和深化的；开拓人类文明的先驱者们要经历一条多么艰难而曲折的道路！当然，小阿基米德并不是没有前人积累的知识可以学习。叙拉古已经不是一片荒滩。不过，比起大海彼岸的亚历山大城，叙拉古的文化毕竟落后得多。

没几年功夫，阿基米德以优异成绩学完了叙拉古学生通常学的功课。他不但熟读经书，而且注重实际。他看到搬夫们劳动艰苦，就设计了杠杆滑轮装置，以便吊起沉重的货箱。他虽然没享有“神童”的殊荣，却得到过国王的青睐，被接到王宫住了几天。不过阿基米德对王室的享乐兴趣不大，总惦记着有机会到亚历山大城去学习。他看到了一些现象，可是道理还不清楚。他想到了一些问题，答案却还茫然。年轻人在百思不得其解的时候，多么需要先行者的帮助啊！

专心治学的父亲病倒，不幸中年谢世。阿基米德很悲痛，也日益感到世态炎凉，看到了以前所不知道的生活中丑恶的一面。古希腊的文明光辉灿烂，而它的野蛮也是赤裸裸的，令人触目惊心。别的且不说，在发达的商业中有一大宗是奴隶买卖。战争中的俘虏就是奴隶。那时候的海盗，“越货”不杀人，掳去卖给奴隶贩子。兵匪一家，无理可讲。这样的奴隶市场“货源”充足，久盛不衰。

一天，阿基米德路过奴隶市场。闹哄哄的吵嚷声使他不由自主地停住脚步。只见一个满脸横肉的奴隶贩子正揪着一个老人的头发在高声嚷嚷："红头发不妨碍他干活。再说这老头还挺有学问，在亚历山大城有点名气呢！"

"啊！"阿基米德怒不可遏，抢上前去，厉声呵斥奴隶贩子：

"你别再折磨他了！你不知道他是个老人吗！"

那欺软怕硬的家伙松了手。

一打听，那红发老人竟是萨摩斯的科农！这位有名的科学家怎么成了被拍卖的奴隶？阿基米德顾不得细问，当即用坚定的语气向奴隶贩子声明，他决定赎走科农。

归途中，阿基米德义愤填膺。科农，这位对圆锥曲线和日食研究卓有贡献的大学者，竟同几十块钱一头的牲口一样被买卖！这帮愚昧贪婪的人间败类，和吃人的野兽有什么两样！

回到家里，阿基米德把他对科学的热爱、对师长的尊敬和对奴隶的同情，都倾注到对科农的慰问和接待上了。

科农是怎样沦落为奴隶的呢？原来，他在参加亚历山大城天文台一次星座观察的时候，在地中海遇上了海盗，被劫到罗马卖给奴隶贩子，又辗转到叙拉古的奴隶市场。若不是阿基米德搭救，老人的命运就不堪设想了。科农十分感激阿基米德，更感快慰的是，他发现阿基米德志趣高尚，勤奋好学，所问所答，显示出年轻人思维敏捷活跃，见解深刻独到。还有什么比发现一棵好苗子更使园丁高兴呢？科农决心尽自己力量好好培养阿基米德。阿基米德和科农邂逅，聆听老人教导，消除了思考中的许多疑团，开阔了眼界，感到十分兴奋和愉快。他想挽留老人多住些日子，可是科农离家的时间已经不短，怎么忍心让老人和家人久久分离？依依惜别的时候，科农郑重邀请阿基米德来年春天到亚历山大城学习。这正是阿基米德盼望已久的事，他欣然从命。

渡海求学

春天终于来临了。阿基米德告别母亲和妻子，搭上一艘开往亚历山大城的航船启程。在一望无际的蔚蓝的海面上，白色的海鸥在自由翱翔。阿基米德的心随着海鸥飞向那遥远的学术圣地亚历山大城。

虽然是少有风暴的航海季节，水手也精明老练，但是，没有航海罗盘，又没有导航海图，漂洋过海毕竟是很危险的。再说，海盗出没无常，防不胜防。只要远处出现船只，大家就紧张起来。有一回碰上的倒不是海盗，而是船头装着巨大的“乌鸦座”吊桥的罗马战船。这时期罗马人在第一次布匿战争①中战胜迦太基人，控制了西西里等岛屿。叙拉古就在他们的“保护”之下。骄横的罗马战船驶到面前，摆出宗主国老爷的架势，把叙拉古人羞辱了一番。这帮家伙对自己的老百姓尚且耀武扬威，何况对“保护国”的臣民。阿基米德深深地感到悲哀，自己的祖国比被揪着头发拍卖的奴隶的处境好多少呢？科农老人说得对，叙拉古不能幻想罗马人的保护，倒是要提防他们的骚扰。他们造出“乌鸦座”吊桥，不就是为了行凶逞强，掠夺侵略吗？叙拉古必须有自卫的准备。可是希伦王和他的大臣们正沉溺在权力和享乐之中。叙拉古的前途实在令人忧虑。

几天以后，驶近目的地的喜悦才排开罗马战船引起的不快。一天清早，阿基米德终于在东方的晨曦中看到亚历山大港口有名的灯塔。这座灯塔是古代西方七大奇观②之一。它那几十层楼高的塔身巍然屹立在法罗斯岛上，令人肃然起敬，也强烈地震撼阿基米德的心。

---

① 公元前3世纪到前2世纪间，罗马人和迦太基人发生过三次战争。因迦太基是腓尼基城邦推罗所建的国家，罗马人称腓尼基人为布匿人，所以称布匿战争。

② 西方古代七大奇观指埃及的大金字塔、巴比伦的“空中花园”、奥林匹亚的宙斯神像、以弗所的阿泰密斯神庙、哈利卡纳苏斯的摩索拉斯陵墓、罗德岛上太阳神巨像、法罗斯岛上的灯塔。灯塔高约122米，建于公元前285到前247年。

亚历山大是古代最大的城市，街道宽阔，建筑宏伟。线条粗犷、装饰华丽的托勒密王宫和公共庙坛雄伟壮观。多么能干的亚历山大人啊！不过，阿基米德没有心思细细观赏，直奔他仰慕已久的博物馆[①]。他在天文台会见了日夜思念的科农老人。重逢的兴奋的欢愉是可以想像的。科农让客人早些休息，以消除旅途的疲劳。可是阿基米德哪里睡得着！主人刚离开，他就悄悄出门，找到不远处的图书馆。看到那丰富的收藏，阿基米德心花怒放。用木棍把一张张纸莎草纸[②]卷起来的一卷卷珍贵的手抄书，堆满了一列列高大的书架。打开一卷，是希腊自然哲学家德谟克利特的几何著作；再看一卷，是欧多克斯[③]的天文学说。啊！这些大卷就是欧几里得的《几何原本》！阿基米德看着看着，很快入了神，周围的事物和时光的流逝，他全然不知觉了。……

天色已经暗下来，图书馆里的读者走光了。一位年轻人热情地过来和阿基米德打招呼。他竟然毫无反应。年轻人搭着他的双肩，摇了两下。阿基米德才缓缓抬起头来。两人默默地审视着对方。

“厄拉多塞，”年轻人爽快地自我介绍。

“阿基米德，刚从叙拉古来。”

厄拉多塞听了大喜过望：

“你原来就是科农老师多次谈起的阿基米德！”说着和阿基米德紧紧拥抱起来。

对于好学而热情奔放的厄拉多塞，阿基米德也衷心喜爱。两人一见如故，从此结成终生的挚友。

在科农和厄拉多塞两位师友的帮助和关怀下，阿基米德开始了

---

① 亚历山大博物馆建于公元前 3 世纪的托勒密王朝，内分文学、数学、天文学和医学四大学部。从各地延聘了上百名学者在馆内专心致志地从事教学和研究。博物馆内建有动物园、植物园、天文台和解剖室等教学科研设施。著名的亚历山大图书馆就在它旁边。

② 纸莎草纸是一种可书写的草本植物纸莎草的叶子，稍经处理后当纸用。真正的纸于 2 世纪由中国蔡伦发明。

③ 欧多克斯（约前 400-前 347）是希腊数学家、天文学家，创造“穷竭法”，引入变量以处理不可公度比（无理数），并提出第一个天文体系理论。

紧张而愉快的留学生活。

古希腊群星璀璨

古希腊独特的经济、政治状况和地理环境，使它在文明史上享有不朽的地位。古希腊繁荣的科学艺术对西方文化发展影响巨大，在近代数学奠基中起着决定的作用。古希腊一批杰出人物功绩辉煌，名垂千古。

阿基米德置身于学术的殿堂，在璀璨群星光照之下潜心研究，学到了丰富的知识。更重要的是，他博采众长，形成自己的见解、方法和风格。

“希腊数学鼻祖”泰勒斯（约前624-约前547）把几何从测量经验提高为演绎科学，建立了初等几何的一些定理。阿基米德很赞赏泰勒斯把自己的理论付诸实践：利用相似形概念，测算金字塔高度以及航船和海岸的距离，研究航海技术和贸易经济。泰勒斯提出“万物皆为水”，表明他摆脱了宗教神灵观念，断定自然界有它固有的物质组成，是人类可以认识的。

科农的同乡，和释迦牟尼、孔子同时代的毕达哥拉斯（前572-前497）提出“万物皆数也”。这听起来似乎过于玄妙；可是仔细一想，其中的确蕴涵着某种真理。放眼五彩缤纷的世界，哪一样离得开数呢？浑圆的天体沿着几何轨迹运行。琴弦的长度和音调的高低有一定的比例关系。变幻不息的宇宙是和谐的。大自然遵循数学的规律。年轻的阿基米德深深地感动了。毕达哥拉斯学派又从自然实体中抽象出数和形。正整数不一定是小石子，直线也不总是拉直的绳索。这种抽象使人类对数学认识发生重大飞跃。数学的力量不正在于它的抽象性吗？

毕达哥拉斯学派最负盛名的数学成就是首先证明了毕达哥拉斯定理：

“直角三角形斜边平方等于两直角边平方的和。”

这个事实早在1000多年前巴比伦人已经知道。在毕达哥拉斯以前600多年，中国数学家也指出过“勾三股四弦五”的关系[①]。在中国，这个定理称为“勾股定理”。古代证明这个定理不容易。据说，毕达哥拉斯学派证明它以后，宰了100头牛，大摆筵席，庆祝这一人类智慧的伟大胜利。从勾股定理，他们很快发现存在无公度的两线段，也就是发现了无理数。他们还掌握了黄金分割作图和二次方程的图解法，并且知道存在5种正多面体。毕达哥拉斯讲学备受欢迎。当时明令禁止女子听讲，可是常常有女子不惜犯禁前来参加。

看到毕达哥拉斯学派的巨大成就，阿基米德不禁发出赞叹。可是科农老人说：

“毕达哥拉斯后来在克罗顿创立学园，遭到反对派袭击。学园被焚毁，毕达哥拉斯逃到米太旁顿。但是，他仍旧没有能逃脱政敌的追击，公元前497年在米太旁顿被害。”

科农的话引起阿基米德一阵叹息，他久久沉默不语。他联想到大哲学家苏格拉底（前469-前399），因为政见为统治者所不容，被迫在狱中服毒自杀。科学家常常天真地想逃离政治，搞纯粹的学术研究。可是，他们什么时候脱离过现实的政治社会而生活在真空中呢？

苏格拉底的大弟子柏拉图（前428-前347）在自己学园门口立着一块牌子：“不懂数学者免进。”并且认为，“神永远按几何规律办事。”这使阿基米德高兴。他尤其赞同柏拉图在数学研究中明确规定术语的含义，指明推理依据的主张。没有“定义”和“公理”，一切命题的确难说清楚。

阿基米德久闻亚里士多德[②]大名，但是还没有读过他的著作，

---

① 见《周髀算经》。此书西汉（前206-后8）佚名作者撰。其中论述公元前11世纪周公和数学家商高对话时指明商高说过“勾三股四弦五”这样意思的话。

② 亚里士多德（前384-前322）是古希腊哲学家、科学家。他的思想体系长期统治着西方学术界。

只从亚历山大城的学友言谈中有所了解。亚里士多德最有价值的贡献是创立逻辑学。在认识自然过程中，严密的演绎推理是必不可少的。亚里士多德把前人的成果规范化、系统化，建立起形式逻辑体系，影响极其深远。一直到19世纪以前，人们还没有发现它的不足。不过对于在西方学术界被认为具有至高无上权威的亚里士多德的世界体系，阿基米德是存疑的。他认为，亚里士多德的以地球为中心的宇宙观不如当时亚历山大城另一位学者阿利斯塔克的日心学说有道理。后来，阿基米德不顾亚里士多德的威望有多高，向人们介绍了阿利斯塔克的日心说，终于产生了一定的影响，以至于在1000多年以后，哥白尼（1473-1543）建立新的日心说的时候还能感受到它。

比起这些哲学家来，欧多克斯更引起阿基米德的关注。在欧多克斯的许多创造中，阿基米德特别推崇"穷竭法"。这是一种寻求图形面积和体积的有效方法。比如，相继作圆内接正多边形，使内接正多边形边数无限增加，它就可以"穷竭"圆的面积。他认为求积问题在生产和生活中有很大的实际意义，所以对"穷竭法"的研究特别认真细致。他兴奋地告诉厄拉多塞：欧多克斯证明了两圆面积比等于半径平方比，两球体积比等于半径立方比；德谟克利特发现棱锥或圆锥的体积等于同底同高的棱柱或圆柱体积的1/3，而证明却是欧多克斯作出的。听了以后，厄拉多塞不禁大声地赞叹："真是神明一样的人啊！"

被亚历山大城莘莘学子视为神明的，是鼎鼎大名的欧几里得。大家敬重这位先师，绝不只是因为他是先王托勒密一世召请来的学界领袖，科农老人的老师，而是因为每个人都从他那不朽的传世之作《几何原本》（Elements，简称《原本》）中得到了宝贵的教益。他回覆国王询问学习捷径的名言"几何学中无御道"，使他成为科学和民主的精神领袖，鼓舞着后来人继续前进。

阿基米德虽然对《几何原本》13篇中前面许多篇的内容已经比较熟悉，他仍然从头读起，而对论述不可公度量的分类、立体几何

和“穷竭法”等后面诸篇研究得更加细致。从十几个简单的公设和公理出发，通过演绎推理，建立了467个命题。这个宏伟的理论体系，虽然还不能说已经锤炼得天衣无缝，却也严密得难以质疑。看到演绎科学这样辉煌的胜利，使阿基米德对未来的科学探索充满信心。

新的高峰

师承希腊群英，借力于亚历山大博物馆这块学术圣地，阿基米德学业有了长足进步。生活充实紧张，时光似乎流逝得也更快。转瞬3年过去了。从叙拉古传来亲人催归的信息。阿基米德捆好一卷卷纸莎草纸手稿，和科农、厄拉多塞等师友依依惜别。

回到叙拉古，阿基米德继续刻苦研究，并且克服种种困难，和厄拉多塞等亚历山大城的学友保持联系。阿基米德研究的捷报频频传到亚历山大城，再慢慢扩大到整个古希腊。他在力学上的成就，使他的声誉凌驾于先哲之上。他的几何著作成为希腊数学的顶峰。他的数学创造，使他和数学家欧几里得齐名。阿基米德成为古代科学家的光辉代表。

当然，阿基米德是经过艰苦卓绝的劳动，付出毕生心血，才获得辉煌成就的。且不说当时已有的知识是多么贫乏，单单考虑到没有印度人创造的阿拉伯数码和韦达[①]发展的字母代数，那时数学研究的艰难实在是后人所难以想像的。然而阿基米德有坚强的信念：作为了解未知的手段，数学威力巨大。从经验归纳出少数公理，通过演绎推理，可以得到丰硕的成果，乃至建立宏伟的体系。欧几里得几何就是一个极好的例证。许多人不远千里到亚历山大城来对它顶礼膜拜是不奇怪的。只是把前人的成果接受下来还不够；阿基米

---

① 弗朗西斯·韦达（1540-1603）是法国著名数学家。在3世纪希腊数学家丢番图（约250-约334）的名著《算术》启发下，系统地使用字母表示未知量和系数，使代数研究一般类型的公式与方程而和算术分开来。他只承认正根，部分地表达出根和系数的关系。他在整理三角学中给出正切定理，并利用三角变换解出不可约三次方程。

德明白，更重要的是创造。比如，只知道圆面积正比于半径平方是不够的。怎样确定比例系数，算出圆面积呢？反复琢磨以后，阿基米德想出了一个巧妙的方法。他证明了一个圆面积等于一个直角三角形的面积，这个直角三角形的底等于圆周长，相应的高等于圆的半径。为了求得圆周长，他用边数越来越多的内接和外切正多边形的周长来逼近它。这也是穷竭法的精神。在作了 96 边形之后，他终于求得圆周率的近似值。用后世的记法就是：

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}。$$

接着他把这个结果写成《圆的测定》一文。在西方常称为阿基米德数的圆周率 π 是个基本常数，它的研究在理论上和应用上都有重要意义。700 年以后，中国伟大数学家祖冲之①算出一个更精确的 π 值：

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927。$$

阿基米德不但解决了圆面积计算问题，而且找到了已知三边求三角形面积的方法，后人把它写成：

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

并且称它为希罗公式（阿基米德在天之灵对这个误会恐怕不会很介意，因为他关心的是求积的实用价值，而不是个人的声望）。球的面积和体积计算，特别引起阿基米德的注意。在研究过程中，阿基米德发现，球的外切圆柱的体积和表面积，球的体积和表面积，它们的对应的比都是 3∶2。啊，多么巧！他十分欣赏这个结果，甚至希望将来在他的墓碑上刻出这个定理。阿基米德在他有名的《论球和圆柱》一文中把“两点之间的连线中以直线为最短”作为第一公理，论证了球的面积等于它的大圆面积的 4 倍等。

学习欧几里得的《二次曲线》，使阿基米德对圆锥曲线产生浓厚兴趣。不久，他得到了椭圆的面积公式。用后世的记法，当椭圆

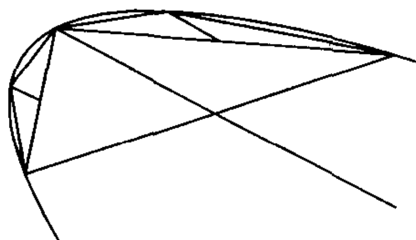
---

① 祖冲之（429-500）是中国南北朝时期南朝数学家、天文学家，今河北省涞源县人，著有《长水校尉祖冲之集》51 卷。《缀术》、《九章术义注》等数学著作已失传。

长半轴和短半轴分别为 a 和 b 时，面积

$$S = \pi ab。$$

功夫下得越深，本领越发高超。最为后人称道的是他对抛物线弓形的研究。阿基米德把平面图形看做由有重量的直线组成的平板，直线的重量和它的长度成正比。这样，图形的面积就要适合杠杆定律确定的平衡条件。他用这种独创的力学方法求得抛物线弓形的面积。不过，他认为这不算严格的几何证明。他再施展拿手的穷竭法，用一系列三角形的和去逼近抛物线弓形的面积（如右图），这些三角形面积构成一个公比为 1/4 的等比数列。最后，他用间接法论证了抛物线弓形面积就等于第一个三角形面积的 4/3 倍；这第一个三角形是以弓形的弦的两端为两个顶点，过弦的中点作抛物线对称轴的平行线，平行线和抛物线的交点就是第三个顶点。这个证明成为穷竭法的光辉典范，在许多书上被复述。如果不用积分法，即使在 20 世纪，解答这个问题也不大容易。在给出提示以后，它被作为难题，出现在 1965 年我国高等学校入学统一考试数学试题的最后。



阿基米德把力学方法的探求和穷竭法、间接法证明都记录在《抛物线面积的求法》一书中。他用力学方法还发现了有关球台和其他旋转面的一些定理。他认为这是发现几何定理有效而新颖的方法，专门写了《方法》一文来介绍。他写信给厄拉多塞说：

“我相信这个方法会对数学起不小的作用。……一旦这个方法确立之后，有些人，或者是我的同时代人，或者是我的后继者，就会利用这个方法发现一些我所没有想到的定理。”

为了纪念和厄拉多塞的友谊，阿基米德在《方法》一文前题字，把它献给这位终生的至交。

接着，阿基米德又致力于等速螺线的数学研究。后世的青少年在学习解析几何的时候，知道这种“阿基米德螺线”在特定的极坐标系的方程为$\rho = a\theta + \rho_0$。阿基米德那时候还不知道极坐标，但是这没有拦住他求出螺线弧所围的面积。在《论螺线》中，阿基米德证明了螺线$\rho = a\theta$的第一圈和初始线所围面积为$\frac{4}{3}\pi^3 a^2$；他还求出了过螺线上任一点的切线。阿基米德螺线在后来的机械设计中有广泛应用，促进了自动化技术的发展。

“天上的星星有多少?”阿基米德小时候也和许多孩子一样想到过这个问题。后来，他懂得许多星星和地球一样，它们本身不发光，也是由沙土组成的。他结合对很大数目的记法研究，探讨宇宙间沙粒数目的问题。在《沙粒的计算》一文中，阿基米德提出一个特大数字的记数方案，表明可以把数写得大到不受限制的思想，实质上是无限的概念。在这篇文章中还表明了把同底的幂相乘化为指数相加的思想，这种认识促进了16世纪英国数学家纳皮尔（1550-1617）对数的发明。

阿基米德的作品总是把数学研究和自然探索联系在一起，这个特点在几何和力学中尤其鲜明。它们当之无愧地被奉为古代数学和物理学的经典。

阿基米德取得的成就是空前的。他付出的劳动，他的钻研精神，也远非常人可比。人们通常用“入迷”来形容一个人热爱和专注于一项活动，用这两个字来形容阿基米德的研究情景是最恰当不过了。在海边，他无心观赏大海和日出；他把沙滩当纸，用木棍或手指作笔，来探索自然的奥秘。他坐在篝火前，把灰扒出来，在上面算算画画，没有留意用来取暖的火已经熄灭。每次洗完澡，他不急着穿衣，而忙着用手指在自己抹了橄榄油的皮肤上打起草稿来。他完全沉浸在不断的自然探索中了。

对于阿基米德，数学研究是认识和改造自然的强有力的工具，也是一种享受，一种对美好理想的追求。在离别亚历山大城以后，

数学研究还寄托着他对师友们的思念。有一次，他想出了一道有趣的“分牛问题”，把它献给厄拉多塞。这道有名的“阿基米德分牛问题”一直流传下来，后人还把它改写成韵文形式，显得格外优美。它被20世纪德国数学家海因里希·德里收进他那著名的习题集《数学的凯旋》①。

理论物理的缘起

阿基米德不愿意也不可能徜徉在纯粹数学的园地之中。他不可避免地要为生活中的实际问题备受折磨和困扰，同时也就在生活中得到升华。

一天，阿基米德正在家中思索物体平衡问题，忽然希伦王召他进宫，要他设法解决造船工地上发生的麻烦。原来，希伦王为了和外国的大航船媲美，下令建造了一艘富丽堂皇的大游船。不知是因为船太重还是别的什么缘故，竟没法使船下水。有人建议快请大学者阿基米德来解决这个困难，别让外国人看笑话。

阿基米德到工地一看，船是仿照迦太基人的五层橹船造的，真是大得惊人。船底的垫木都撤了，船却没有滑下去。工头们愁眉不展地陪着阿基米德观察，还不时地诉说着他们的委屈。希伦王不但当众斥责了他们，还声言问题不解决就要问罪。阿基米德一边安慰他们，一边询问他们对下水方案的意见。经过两天思考，阿基米德拟就了拖船下水的方案：一面用一套巨大的滑轮装置拖曳，一面用一组杠杆撬起船身，在船底放置滚木。工匠们一听阿基米德有了好办法，立刻按照他的吩咐准备起来。希伦王也选择好黄道吉日，邀请叙拉古的显贵和外宾前来参加大游船下水仪式。

这一天，海岸高处挤满了看热闹的人。虽然在盛夏的骄阳下闷

---

① 上海科学技术出版社1982年出版该书的中译本，随英译本改名为《100个著名初等数学问题——历史和解》。

热异常，大家仍然兴致很高。众人的目光都盯着阿基米德和协助他的工匠。开始了！一大排杠杆撬起了船身，一根根圆木垫在船底下。几大车圆木垫完以后，阿基米德把壮工组成10队，分赴大船两侧的滑轮组。看，阿基米德举起手臂。大家都屏住了气。只见他手臂一挥，壮工们一齐用力扳动长长的手柄。奇迹发生了！伴随着愈来愈响的圆木滚动的隆隆声，大船像一座巍峨的宫殿那样，徐徐地滑入了地中海的怀抱！

啊，阿基米德，阿基米德！人民向你欢呼，人民为你骄傲！希伦王也随着群众的欢呼声高喊：

“阿基米德了不起！英雄！”

阿基米德虽然事先估计船能够下水，但是，当他看到那庞然大物果真动了起来，在一刹那间，科学的威力创造的奇迹，这样活生生的，以波澜壮阔的场面和排山倒海的气势呈现在他的面前，他仍然感到非常激动。

在长期思索和多次实验的基础上，阿基米德接连写出了《论平面板的平衡或平面的重心》、《论杠杆》和《论重心》等著作。《论平面板的平衡或平面的重心》一直流传下来，在书中他提出了著名的杠杆原理。对于力学中这个简单而又重要的原理，他有一句形象生动的名言：

“如果给我立脚的地方，我可以把地球撬起来！”

阿基米德并不知道，在他以前200多年，中国的《墨经》[①] 上已经载有这个原理。在《论平面板的平衡或平面的重心》中，阿基米德仿照《几何原本》建立了静力学体系，并且给出一些图形的重心的确定方法。

大船下水没有费阿基米德多大力气；希伦王新的麻烦可难为了阿基米德。希伦王为了炫耀自己的富贵，让工匠做了一顶纯金的王

① 《墨经》是中国思想家墨翟所创墨家学派讲述逻辑学、认识论、力学、光学、几何学、时间空间和物质结构的著作，为研究我国古代自然观的重要资料。

冠。他戴上纤巧悦目的王冠，得意非凡。可是工匠在领赏的时候神色异常，希伦王不觉起了疑心："那家伙落了我的金子没有？"大臣们合计了半天，谁也解不开这个疑案。于是，阿基米德又被召进宫来，要他在不损坏王冠的前提下，查明金冠是不是掺了假。阿基米德一听，意识到这是个棘手的难题。当时人们还没有密度和比重这些概念，只是朦胧地觉得同样大小的铁块比木块重些。阿基米德仔细地比较以后明确了，同样体积的金块比银块重。这样，如果能算出王冠的体积，和相等重量的金块的体积比较，就可以知道金冠是不是掺了银。问题似乎又回到他熟悉的体积计算问题。他觉得有希望了。但是王冠的形状实在太复杂。他给出许多种几何分析，都得不出精确的结果。当然，把王冠砸碎，马上可以得到希伦王所要的答案。国王不许这样做；阿基米德也不愿意这样做。这个问题关系到他所偏爱的复杂形体的体积计算。老实说，问题愈复杂，研究起来愈有意思。阿基米德夜以继日地冥思苦想，试验各种测算。为了做完一次测算，常常废寝忘食。家里人为他的健康十分担忧，不得不强制他睡眠、进食以至沐浴。

那天，阿基米德又被"拽"进澡堂。服侍他的小伙子想让这位大学者洗好澡，特地准备了满满一澡盆热水。对小伙子热情的招呼，阿基米德报以微微一笑。他看着热气腾腾的洗澡水，精神恍惚地坐了进去。尽管动作缓慢，水还是溢了出来。随着身体浸没得愈多，溢出的水也愈多。阿基米德看着不断流出的水愣住了。突然，他眼睛一亮。啊，有啦，有啦！他蓦地从浴盆里一跃而起，顾不得穿戴完毕就往家跑，小伙子想阻拦也来不及。路人都吃惊地看着这个着魔似飞奔的学者，只见他一边跑一边呼喊：

"*ευρηκα*，*ευρηκα*！"

这句希腊话的意思就是：

"找到啦，找到啦！"

原来，不论形状多么复杂的物体，浸入水中，它排开水的体积总等于浸入水中的体积。排出的水的体积是好算的。这样不就可以

知道王冠的体积了吗？

希伦王听明白阿基米德说明以后，拿出和王冠同等重量的金块。阿基米德拿来一只瓦罐和两个盘子。两次把瓦罐装满水，分别把王冠和金块放进去，把溢出的水盛在不同的盘子里。结果发现王冠比金块排出的水多。这说明王冠体积比等重的金块体积大。因此阿基米德断定，金冠中一定掺了假。在事实面前，承制王冠的工匠只得低头认罪。

王冠掺假问题的解决，使阿基米德获得了确定复杂形体体积的“非数学”方法，并且实质上得到了物质“比重”的概念。阿基米德没有就此止步。他把物体浸入水中现象的分析和过去重船漂浮原因的探索联系起来。终于发现了一条普遍规律：

物体在流体中受到的浮力等于它所排开的同体积的流体的重量。

这就是著名的阿基米德定律。这是一个定量的精确关系，被人们称誉为理论物理的第一律。

这样，阿基米德不但透彻地解释了重船不沉的道理，还能科学地计算出船只安全的载重量。回到王冠问题，阿基米德还可以通过比较王冠和金块浸没在水中各自的失重，来确定王冠是不是掺了假。

阿基米德把他开创的流体静力学研究结果写入另一卷名著《论浮体》中。在书中，阿基米德有条不紊地证明了阿基米德定律。即使经过了2000多年，今天的物理学家仍然认为他的证明是完全正确的。

保卫叙拉古

希伦王不仅由于阿基米德解决了他的王冠难题感到高兴，更因为发现他的学者具有非凡本领而欣喜。阿基米德的确非同寻常；一般人办不到的事情，他都圆满地一一完成了。怪不得连亚历山大城的学者们都那样佩服他，经常来信向他请教。希伦王知道技术发明在战争中的作用。在第一次布匿战争中，罗马海军因为制造了“乌鸦座”吊桥，搞接舷战，发挥他们的步兵优势，战胜了迦太基的强

大的海军。他知道，夹在好斗的罗马人和迦太基人之间，他的城邦随时都有被侵袭的危险。在享乐的喧闹停止以后，他不免暗暗发愁。于是，他再一次把他的“智多星”请来，要阿基米德为叙拉古设计防御的武器。

怎样为保卫叙拉古出力，阿基米德早有考虑。他知道罗马元老院和迦太基政治寡头同样贪婪和互相仇视。他们欺骗自己的民众，进行无休止的劳民伤财的战争。第一次布匿战争打了近 30 年。统治者丝毫不为百姓生命财产受损失而内疚，却更滋长了掠夺的欲望，疯狂地宣传复仇思想。战争随时可能爆发。叙拉古夹在中间，形势岌岌可危。阿基米德决心竭尽自己的智慧和力量保卫叙拉古。

紧张的设计工作开始了。图样一张张画出来。一种新奇的威力巨大的投石装置的图样完成了。保卫叙拉古免遭外敌掳掠的决心，以及阿基米德设计的新奇巧妙，大大激发了工匠们的劳动热情。新武器以前所未有的速度生产出来。希伦王命令他的臣民们把武器保养好，并且挑选出一批批青壮年进行训练，使他们熟练掌握武器使用的技能，随时准备对付外敌入侵。

老希伦王没有等到第二次布匿战争爆发就死了。公元前 218 年，罗马人违约干涉他们势力范围以外的事务，迦太基统帅汉尼拔立即越过阿尔卑斯山，从北面侵入意大利，所向披靡。公元前 216 年，坎尼一役完全摧毁了瓦罗率领的一支罗马军队。在罗马人连吃败仗的形势下，意大利南部和西西里岛一些城邦纷纷脱离罗马，归附汉尼拔。长期苦于罗马横征暴敛的叙拉古贵族，也怂恿年轻的国王希罗尼木斯脱离罗马，和迦太基结盟。这招致罗马军团的大规模进攻。罗马人并没有一直溃败下去。庞大的罗马军队缓慢而成功地封锁和围困迦太基人，同时攻击叙拉古这个影响最大的城邦，以遏止属地叛离的势头。

罗马名将马塞卢斯从海陆两路围攻叙拉古。面对强大的敌人，叙拉古上下都把希望寄托在阿基米德的“机械化部队”上。只有他创造的奇迹才能拯救叙拉古。阿基米德意识到事态严重，他镇定自

若地指挥着青壮年准备迎击罗马侵略者。

骄横的罗马佬从陆路来了。他们要好好教训一下胆敢背离罗马帝国的叙拉古人。当先头部队抵达城下的时候，叙拉古的前哨早已经撤进城去。这更使罗马人自觉不可一世。不等马塞卢斯下令，攻城梯队就扛着云梯往上冲。后续大队跟着向前涌。眼看攻城的士兵快爬上城头，忽然从城里传出一阵呼喊。顿时飞出数不清的大石块，砸向密集的罗马士兵。随着悲惨的嚎叫，罗马人倒下一大片。后面的刀手举起盾牌，试图抵挡那雨点般的石块。无奈磨盘一样大的飞石力量太大，哪里抵挡得住！队伍溃退下来，又遭到叙拉古弓弩手的射击。罗马人首次进攻失败了。

马塞卢斯万分气恼，这时从海路进攻的他的副将克劳狄乌斯的信使又传来噩耗，航道阻塞，战船搁浅，靠近岩岸的舰只遭到猛烈袭击。马塞卢斯怒斥了他那些鲁莽无能的下属，就苦苦地思量起叙拉古新奇的防御手段来。迦太基人连对付“乌鸦座”吊桥的技术都没有，小小的叙拉古会有什么能人？噢，对啦，一定是那个传说纷纷的阿基米德！马塞卢斯在学生时代就听说过这个声名卓著的学者。对于这样的对手，必须认真对付。马塞卢斯决定使用罗马军团最厉害的“攻城塔”，来对付该死的飞石。为了安全，攻城塔还必须大大加固。

10 多天以后，一座座用油渍牛皮和方木制成的高大的攻城塔缓缓地逼近叙拉古城墙。塔尖上的旌旗哗啦啦地飘着，好不威风。步兵方阵隔着一段距离跟在后面，和 20 世纪步兵跟在坦克后面很相似。城墙里一片死寂。看来，叙拉古人被攻城塔镇住了。在军官督促下，罗马士兵快速地跟上去。攻城塔上的罗马弓弩手不停地射击，迫使叙拉古人只能作零星的还击。远远瞭望的马塞卢斯对于叙拉古人的沉寂有些不安。攻城梯队虽然心有余悸，却因为有攻城塔壮着胆，很快逼近城墙。可是，没有等云梯靠上去，突然从城内射出一排排带着火焰的利箭。说时迟，那时快，几座攻城塔顿时燃烧起来。塔上弓弩手慌了神，哪还顾得上射击，纷纷逃命。攻城的士兵惊慌

失措，还没有来得及往下撤，随着呼喊声，山崩一样的飞石又倾泻到他们的头上。叙拉古的抛石器再显神威，打得罗马士兵抱头鼠窜。这时候，攻城塔燃起熊熊大火，不一会儿，歪歪扭扭地倒塌下来。上有飞石，下有火海，罗马人插翅难逃。转瞬间攻城梯队死伤殆尽。随着一片鬼哭狼嚎，罗马军队败退下来。

马塞卢斯惊魂未定，又传来噩耗：海军的战船被叙拉古人烧着了！这是怎么一回事？听说叙拉古人用许多面大镜子，把太阳光反射到搁浅的战船上，使它起火焚毁。马塞卢斯感到浑身发冷，呆坐在那里，一句话也说不出来。他无法判断利用镜子来烧船是不是可能，他只觉得阿基米德实在比神话中的百手巨人还厉害。无论如何他不能再拿士兵的生命去冒险。当他看到同样哭丧着脸的克劳狄乌斯，意识到不必再转弯抹角，假装镇静。他直率地提出撤军的想法。经过计议，罗马人改用围困的方法对付叙拉古，而调走大部兵力去继续和迦太基人厮杀。

惦念着“谜”和“题”

当叙拉古上下沉浸在胜利的喜悦中的时候，阿基米德严肃地告诫那些负责城防的官员，必须继续备战，同时要设法解决围城带来的各种困难，尽可能争取迦太基人的援助。可是被胜利冲昏头脑的城防官员哪里听得进阿基米德的忠告。看到群众的麻痹、官员的懈怠和外籍雇佣军的离心离德，老人十分忧虑。只有重温几何学或者步入实验室，走上观象台，他才能暂时丢开烦人的人世难题。他抚摸着早年制作的天球模型，水力驱使星球转动，演示出日食和月食。宇宙是多么和谐美妙；人世却那样混乱丑恶，使他心烦。老人坐不住，走出屋去。在和煦的阳光下嬉戏的孩子们一看到他，就像是一群吱吱喳喳的小鸡，争着向他问好。一张张鲜花般的笑脸，抚平了老人锁紧的眉头。啊，人世也是美好的！可是一想到有可能降临到他们头上的杀戮，老人的心不禁紧缩起来。内心的矛盾痛苦，一天

天折磨着他。慢慢地，他终于悟出一点道理。他觉得人世和自然似乎也相通。是不是人世间的苦难也和科学的难题相似，要经历许多痛苦的挫折，走过弯曲而漫长的道路，才能得到解决？从自己在科学道路上的跋涉攀登，似乎得到肯定的答复。要为解决人世的难题尽力，对自然的研究无疑是用得着的。想到这里，他多少感到有点欣慰。他来不及、也不打算写像欧几里得的《几何原本》那样大部头的著作。但是他一遍又一遍地精心修改自己那篇幅不大的作品。这是他一生科学活动的总结，凝聚着自己无数的心血和汗水。它记录着自己的成功和挫折，欣喜和失望，还有那数不清的沙盘前的踯躅和观象台上的不眠之夜。当然，它也寄托着自己对后人的希望。不过，阿基米德不是在回顾中寻求慰藉，更不是沉浸在自我陶醉中。对于自己在推理中使用的公理和公设，比如后人所谓的“阿基米德公理”①，他还不清楚：如果放弃它会出现什么样的数学体系？他愈想愈觉得疑难太多。特别在天文学上，阿利斯塔克的日心说比地心说可靠，然而还缺少有力的论据。他企图验证欧多克斯理论体系的天球仪，也远不是完全成功的。天体太遥远了，看不清楚。需要更有效的观测手段。他虽然发明了十字测角器，但是还远远不够。也许要在光学上多下些功夫。……

公元前212年，阿基米德不顾年迈，仍然紧张地埋头工作；许多叙拉古人却在长达两年的围城生活的煎熬中日益丧失斗志。就在他们斗志涣散、城防空虚的时候，马塞卢斯重新发布攻城动员令。作为官样文章，他照例提到破城以后的纪律。他当然知道，一场大规模的烧杀抢掠，对叙拉古人是在劫难逃的。考虑到伤害当代大学者的不利影响，他附带提到保护阿基米德的要求。

当家人慌慌张张地进来报告罗马人开始攻城、雇佣兵已经叛变

① 阿基米德公理指出：在长短不等的两条线段中，在较长线段上连续截取较短线段，总可使剩余线段短于较短线段，或者没有剩余。

的消息的时候，阿基米德知道最后的牺牲不可避免了。他开始还想组织人抵抗一下。但是看到贵族官员已经四下逃散，亲属也催他避走，他意识到抵抗已经没有意义。他恼怒起来，固执地拒绝一切劝说，独自走进书房，插上了门闩。他不愿别人再打扰他。他走到儿时就熟悉的沙盘跟前。昨天画就的一盘几何图形清楚地呈现在眼前。一个圆内三条割线巧妙地交于一点。多么美妙！人世呢？当然也将是光明美好的。但是，眼前的现实却是黑暗的。他解答了那么多数学难题，却看不到人世难题的解答。他感到自己衰弱无力。他感到遗憾。当然，他不知道，在后人看来，他既强大有力而且异常完美。1000 多年以后，欧洲文艺复兴最杰出的代表达·芬奇（1452-1519）和开创天文学、物理学新纪元的近代科学的伟大先驱伽利略（1564-1642），都把阿基米德奉为自己的楷模。

但是，此时此地的阿基米德确实烦恼。窗外隐约传来野蛮发狂的喊叫和悲惨绝望的呼号。他想到孩子们，无限的忧愁和痛苦烧灼着老人的心。他无法在几何图形中寻得安宁了。

突然，一阵沉重的脚步声传来，随即门被踢开了。满脸杀气的罗马士兵冲进来。他们打量着这个憔悴的老头。他就是用魔法伤害了那么多伙伴的恶魔吗？他们叽里哇啦冲着阿基米德嚷了一阵。他听懂了，那是要带他到司令官那里去接受审判。阿基米德一言不发地凝视着沙盘。他竭力要从那图形中寻求美好和宁静。这样僵持了一段时间。两个罗马士兵小声嘀咕了几句。一个年长些的来拉阿基米德，一个年轻些的去践踏那画着图形的沙盘。阿基米德被激怒了！他一面用蹩脚的拉丁话怒吼："不许动我的图！"一面向那小伙子扑去。那骄横的士兵回头一剑，刺进了老人的胸膛！

马塞卢斯进城的时候，烧杀抢掠已经接近尾声。他照例出榜安民，叙拉古毕竟还是罗马需要的一块属地，至少是为了贸易上的好处。考虑到自己的威信和表示对学者的尊重景仰，他当众处决了那个杀死阿基米德的年轻士兵；为阿基米德立了一块墓碑，上面刻的





“不许动我的图！”

正是球和它的外切圆柱。

100 多年以后，罗马政治家西塞罗来凭吊阿基米德，好不容易才在阿格里琴门附近找到他的墓。他写道：

“最后，在荆棘苔藓中找到了他的墓碑。我所以能够发现并确认它，是因为我事先知道刻在这碑上的几句诗以及球和圆柱的图形。我站在这位伟大学者的墓前，周围是一片荒草。我想，希腊最著名的城市中最伟大的天才就安息在这儿；要不是亚平宁一位山民发现

的话，人们竟一点也不知道了。”①

其实，这倒是无关紧要。阿基米德在天之灵关心的并不是他的墓地。他关心的是那些自然之谜和人世难题的解答。年轻的朋友，让我们一起来为这些解答贡献自己的一份力量吧！

① 当时，西塞罗命令把墓地整修一新并好好维护。可是，不知过了多久，坟冢再度消失。1965 年，在叙拉古为建造大旅社挖地基的时候，挖掘机重新挖出这块刻有球和外切圆柱的墓碑。



笛卡儿

(1596—1650)

数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了。

——恩格斯

数学史上的伟大转折

阿基米德之死是希腊文明的不祥之兆。除了比阿基米德稍晚一点的阿波罗尼奥斯①在圆锥曲线有伟大的贡献以外，托勒玫②、帕普斯③、丢番图等人在几何、算术、三角等方面的贡献也增添了希腊数学的荣光。特别是3世纪古希腊数学家丢番图的名著《算术》，对后世的数学有深远的影响。但是，总的说来，在阿基米德以后，由于经济、政治（战争是它的特殊形式）和其他种种社会因素的影响，数学乃至整个科学的步履都慢了下来。

---

① 阿波罗尼奥斯(约前262-约前190)是古希腊大几何学家，全面系统地研究了三种圆锥曲线，把它们分别命名为椭圆、抛物线、双曲线。所著8卷《圆锥曲线》共有487个命题，除末卷外流传至今，对后世几何学研究影响颇大。

② 托勒玫(约90-168)是古希腊天文学家、地学家和数学家。通过长期系统观测，建立含有1028个星体的星图，收在他的《大综合论》中。他主张“地心说”，在研究天地的同时，应用和发展了球面几何学和三角学。在平面几何学中论证了有关四边形性质的托勒玫定理。

③ 帕普斯(约3世纪到4世纪)是古希腊几何学家，除有帕普斯定理等发现外，所著《数学汇编》对希腊以前的数学成果作了介绍，对后人了解数学发展历史很有帮助。

在以后的1000多年的漫长岁月里，印度人、阿拉伯人、中国人和中亚一些民族，在数学上都有不少重要贡献；尤其是印度人建立了十进位值记数法①、负数和无理数运算法则，对数学的进一步发展很有帮助。算术、代数、几何、三角这些所谓“初等数学”或“常量数学”发展成熟了。然而在封建统治下呻吟的欧洲，正经历着长夜漫漫的中世纪，在数学史上显得暗淡无光。直到15世纪后半叶，文艺复兴开始，意大利人对代数方程的研究，纳皮尔发明对数，韦达建立代数符号系统，才使数学发展又显露出生机。而真正的伟大转折是笛卡儿的坐标几何的兴起。

17世纪法国先进科学思想的光荣代表勒内·笛卡儿，是卓越的近代哲学家，同时也是第一流的自然科学家。他对哲学、物理学、生物学、化学、医学和天文学都有重大贡献。他的音乐著作对17、18世纪的音乐家产生过很大影响。数学只是他研究的众多科目中的一个。但是，他在数学上的成就，使他在其他方面的工作黯然失色。19世纪英国著名哲学家、经济学家穆勒说：“笛卡儿的坐标几何远远超过他哲学上任何成就，是严密科学中一个最为重大的进展，它使笛卡儿的名字永垂史册。”

小哲学家

法国西部的布列塔尼半岛上有一座图朗城。从塞文山脉北麓逶迤而来的卢瓦尔河轻轻穿过这座幽静的小城，注入美丽的比斯开湾。城里住着一家姓笛卡儿的贵族世家。主人是位有名望的律师，还是布列塔尼地方议会的议员。

1596年3月31日，天空乌云密布，大雨滂沱。笛卡儿家的第三个儿子挣扎着、啼叫着来到人间。产妇苍白的额上沁出豆大的汗

---

① 中国人很早就使用十进位值制，3000多年前的殷墟甲骨文已经采用这种记数方法。印度采用十进位值制记数方法大约在公元前3世纪，以后由阿拉伯人传入欧洲。

珠，接生婆小心翼翼地把婴儿抱到她的跟前。她费力地睁开眼睛，端详着孩子娇嫩的脸蛋，在上面轻轻一吻，旋即昏迷过去。3 天以后母亲溘然长逝。孩子的身体极其羸弱，几乎夭折。幸亏保姆悉心照料，才得转危为安。

父亲给儿子取名勒内——法文 René，就是“重生”的意思。不久，老笛卡儿再婚，好心肠的保姆从此挑起作母亲的重担。保姆聪明善良，会讲许多稀奇古怪的神话。夏天的晚上，星光闪烁，清风拂面，她在院子里娓娓动听地讲起日月星辰的故事。小笛卡儿搂着她的脖子，瞪大眼睛听着，完全出了神。

“你看见正对着窗户的那颗闪亮的星星吗？她叫美女星。那上面啊，住着一位美丽的公主。她的眼睛又大又亮，就这样一闪一闪的。”保姆一边说，一边眨巴着眼睛。

“她的脸像苹果一样，红红胖胖的。她别的不吃，只吃苹果。……”

“她为什么不吃糖？那星星上没有糖吗？”小笛卡儿最爱吃糖，所以不解地问。

“糖啊，有！星星上到处都是糖，连路都是糖铺出来的呢。糖太多啦，吃得公主的肚子啊，疼得哇哇直叫，所以她再也不吃啦。”

“星星上哪来的那么多糖啊？”

“哪儿来的？本来就有的呗！”保姆理直气壮地答道。

“你怎么知道那上面有糖呢？”

“啊……！”口齿伶俐的保姆一时竟支吾着说不出话来。

孩子不算早熟，可是他对每件事都爱寻根问底，像个学问家的样子。别说保姆，就是父亲，虽说是一位享有盛名的大律师，也往往被孩子问得张口结舌，无言以对，最后只好认输：

“好啦，我的小哲学家！这个问题将来由你自己去解答吧。”

父亲没有想到，他漫不经心的一句话，后来竟成为现实。为了揭开笼罩在事物外部的层层面纱，这一理想激励着笛卡儿一生不倦地追求。

拉弗莱舍

老笛卡儿很懂得儿童教育法。他看到儿子体弱多病，爱沉思默想，就让他随自己心意去学习，不加任何限制。这样，小笛卡儿可以展开他想像的翅膀，在那浩瀚的宇宙中自由地翱翔。一上 8 岁，父亲经多方打听，把他送到当时欧洲最有名的耶稣会学校之一——拉弗莱舍公学学习。这是个读书的好地方。一幢幢暗红色的校舍青苔斑驳，爬满了常青藤，在苍劲的古树环抱之中，显得十分庄重而且幽雅。只有远处教堂传来缓慢而深沉的钟声，打破校园里的宁静。

校长沙特利神甫非常喜欢这个瘦削苍白的孩子。他见小笛卡儿身体孱弱，需要比同年龄儿童更多的睡眠，特别允许他早晨可以自由支配，不必随同学一道起床。从此笛卡儿养成在早晨躺着看书和思考问题的习惯。堆放在枕边的一本本哲学、数学、文学和历史书籍成了他形影不离的伴侣。无论是鸟语花香的阳春，还是白雪皑皑的严冬，每天早晨，他把枕头垫得高高的，一只手支在脑后，微闭起眼睛躺在床上。上帝，宇宙，地球，科学，真理，教会，……一直到人，宇宙间的万物，都一一来到他的面前接受检验。除了树叶的簌簌声和鸟儿的啾鸣，四周一片静谧。他从容不迫地对自己提出各种问题，并且试着根据教师或者《圣经》上的论述来作出回答。然后再对这个解答提出疑问。这样，解答，质疑，再解答，再质疑，它们在笛卡儿的脑海里展开反复激烈的交锋。

笛卡儿的青年时代正是欧洲文艺复兴的末期，资产阶级革命的前夕，社会处于宗教和政治变革的阵痛之中。新发现的自然规律向宗教的基本教义提出了严重的挑战。五花八门的哲学信条在实践检验面前纷纷破产。整个中世纪文明受到怀疑。彷徨中的知识分子需要为他们知识的建立寻找新的、坚实的基础。虽然在传统的重要课程——拉丁语、希腊语和修辞学学习中，笛卡儿很快成为一名出色的古典语言学者，可是这位爱追根究底的高材生渐渐对学校的教育

产生怀疑。不说别的，就说神学所宣扬的上天堂之路吧，这个说法的确很吸引人，笛卡儿也和别人一样渴望升入天堂。然而他禁不住对自己发问，怎样能证明这条道路是确实存在的呢？他发觉要学生盲目接受的经院哲学的教条，实际上不过是一种迷信，并没有可靠的依据。他眼下所研究的人文学，看来同样没有什么意义。它们只是钻在故纸堆里，用可疑的方法，烦琐地考证古代文稿中的片言只字，通过语义学的研究来确定它们的含义。似乎这些就是人类追求的终极的完全的"学问"。其实这种"学问"既不能帮助人去改造环境，也不能指导人们自身的行为。于是笛卡儿得出结论，学校的教育除了认识到自己无知以外，没有任何收获。拉弗莱舍是欧洲最有名的学校了，他相信自己并不是劣等生，因此他进而怀疑，在任何其他的地方，究竟还有没有可靠的系统知识？紧接着他就抓到问题的核心：归根到底，怎样才能认识和了解一件事物呢？

1612 年 8 月，笛卡儿以优异成绩从学校毕业。校长沙特利神甫成了他的终身好友。拉弗莱舍的另一位挚友是马林·梅森神甫，他后来成为笛卡儿的科学代理人。

同年秋天，笛卡儿带着一连串疑问，来到波埃顿大学攻读法律。接触到更多的哲学和自然科学方面的书籍，他的思考更加深入了。他认识到，以上帝为中心的经院哲学，既缺乏可靠的基础，它的推理方法也大可怀疑。只有建立在公理基础上的数学推理，显示出无懈可击的严密性，这才是了解事物的有力工具。和数学的证明相比，哲学的、伦理的、道德的"证明"简直一文不值。不过他也觉察到，数学的工具远不是完美无缺的。欧几里得几何的每一个证明，虽然严谨，使用起来却极不方便。证明中它往往要求某种新的甚至是巧妙的想法，因此难于普遍推广。代数则由于受公式和法则的束缚，使用方便但是缺乏想像力。所以他下决心要"寻求另外一种包含代数和几何两门学科的好处而没有它们的缺点的方法"。

4 年以后，笛卡儿以最优成绩获法学博士学位。他对学校里所学知识的贫乏已经感到极不耐烦，虽然他曾孜孜不倦地为它付出过

艰巨的劳动。他再也不愿关在书房里，死啃干巴巴的教条。他决定迈开双脚去“阅读世界这一本大书”。他感到只有到生活中去才能找到基本的真理，而生活，应该在血和肉之中，不是在出版商的纸张和油墨里。

寻找真理

1616年秋天，一个阳光灿烂的早晨，笛卡儿和几个富家子弟一起，离开家乡，来到花花世界巴黎。他要冲破封建教会禁欲主义的束缚和少年时代在体力活动上的种种限制，尽情享受同他的年龄和身份相称的年轻人的所有欢乐。赌博是当时绅士们一种时髦的娱乐，似乎带有一种技艺竞赛的味道，它和数学还颇有些关系。好奇心驱使笛卡儿对它作了一番精心的研究，很快成为“行家”。由于他料事如神，使得庄家们一见他都暗暗叫苦。

赌博的小小成功没有给笛卡儿带来欢乐。俗不可耐的伙伴和花天酒地的生活很快使他厌倦。他独自偷偷出走，在后来称为圣·乔门的郊区找了一个僻静的住所，关起门来研究数学。数学无与伦比的严谨、精密与和谐令他心醉神往。他觉得，数学“提供了获得必然结论和有效地证明这种结论的方法”，这是学校里灌输的经院哲学所望尘莫及的。随着新教和天主教的争论日趋激化，任何权威都可以随心所欲地左右经院哲学的结论，这已经不是什么秘密。他感到数学的方法远远超出它的对象之外，只要对数学方法进一步提炼和完善，就可以用来解决哲学、自然科学和其他领域的一切问题。

笛卡儿夜以继日地学习着，思索着，转眼就是两年。一天，他在路上散步，不巧又被家乡同来的伙伴们发现。为了摆脱这群花花公子没完没了的纠缠，他只得更换住所。正好当时欧洲大大小小的战争连绵不断，他决定随着扣人心弦的鼓号声去周游世界，体验生活。这就开始了他的第一次军旅生涯。

笛卡儿首先来到荷兰，在奥兰治王室的莫里斯王子麾下接受训

练。这时候荷兰还是西班牙的殖民地，莫里斯王子继承威廉亲王的事业，正在为从西班牙的手中赢得独立进行殊死的斗争。王子欢迎笛卡儿的到来，可是不让他直接参加战斗。笛卡儿闲着无事，只好独自在布雷达城里溜达。布雷达在荷兰西部，虽然不大，却还整洁；街道两旁商店林立，行人摩肩接踵，相当繁华。

一天，笛卡儿看到许多人正盯着城墙上一块大告示牌，议论纷纷。他初来荷兰，对荷兰文还不大精通。他请身旁一位学者模样的人把荷兰文译成法文或拉丁文。原来，这是一道挑战性的数学难题，谁要是解答出来，不但可以得到一笔奖金，还将被授予“布雷达数学家”的荣誉称号。那人瞧了笛卡儿一眼，以为这位满脸络腮胡子的青年军官不过是凑凑热闹罢了。不料两天以后，笛卡儿带来了正确的解答。那人不胜惊讶。在交谈中笛卡儿才知道，他原来就是当时颇有名气的学者贝克曼。从此他俩一起讨论科学问题，成为亲密的朋友。笛卡儿从这次成功中看到了自己的数学才能，更加激起他钻研数学的热情。

在荷兰，笛卡儿既体验不到冲锋陷阵的激动和兴奋，也得不到沉思默想所需要的安静。布雷达兵营里的和平生活和巴黎游乐场一样吵闹烦人。这时候正值巴伐利亚选侯对波希米亚开战。于是，笛卡儿脱下军装。匆匆赶到德国，精神抖擞地投到这位选侯军旗下，去迎接剑和火的考验。

三个奇怪的梦

冬天，战事平静。军队驻扎在多瑙河边一个叫诺伊堡的小村庄附近。这儿空气清新，风景如画，令人心旷神怡。笛卡儿倚在山上的栗子树下，眺望着远处波光粼粼的多瑙河蜿蜒向东流去。河面上点点白色帆影，宛如镶在蓝色绸带上晶莹的珍珠。笛卡儿终于得到他一直在追求的安静和休息。

1619 年 11 月 10 日，正是圣·马丁节前夕。营房里张灯结彩，

热闹非凡。夜深了，整个兵营仍然灯火通明，不时爆发出哄笑声和激昂的歌声。官兵们一心想用葡萄酒的香味和喧闹声来驱散死亡的阴影。这时候，笛卡儿正独自徘徊在乡间小道上，苦苦思索着日夜萦绕于他脑际的哲学和数学问题，用“心智的全部力量，来选择我们应遵循的道路”。只有如水的月光深情地照着他的背影，默默地陪伴着他。等他回到兵营，其他人已经烂醉如泥。笛卡儿自己也疲惫不堪，顾不得周围如雷的鼾声，很快进入梦乡。

就在这个夜晚，笛卡儿连续做了三个印象深刻的梦。他自己说，这些梦改变了他整个生活的方向。笛卡儿先梦到他从教堂的隐蔽处被一阵大风刮到一个地方，在那里大风对他无能为力。第二个梦是他遇到一场可怕的风暴，风暴看起来非常吓人，可是对他毫无伤害。最后，他梦到自己在大声朗诵奥生尼的诗句：“我应遵循哪条生活之路？”

人类对于梦，的确还存在不少难解的谜。不过，笛卡儿的梦无疑是他对盘桓在心中的哲学和数学问题长期紧张思考的结果。俗话说：“日有所思，夜有所梦。”就像牛顿看到苹果落地，瓦特看到蒸汽冲开壶盖一样，梦中的情景突然启发了笛卡儿的灵感。“连做梦也在想”——笛卡儿的坐标几何正是在这种情况下诞生的。

早晨醒来，笛卡儿脑海中还浮现出梦境中的情景。他异常兴奋，一反常态，一骨碌就起身下床。他一会儿拿起笔来做做计算，一会儿在房间里踱步沉思。后来他对别人说，他的梦像一把打开自然宝库的钥匙。这把钥匙是什么？笛卡儿没有明确向别人透露过。不过一般相信，这至少是把代数应用于几何，这是坐标几何或者按早先的称呼是“解析几何”的一种简单说法；或者更一般地，是用数学来探索一切自然现象，这就是后世的数学物理学。于是，1619 年 11 月 10 日就成为坐标几何的光荣诞生日，也可以说是近代数学的伟大诞辰。不过坐标几何的思想还要经过整整 18 个寒暑，才正式公诸于世。



用心智的力量选择道路

我只要安静和休息

中国政治家诸葛亮有一句名言：“非宁静无以致远”。意思是只有宁静的心情和环境，才能使思想深邃，目光远大。笛卡儿也不止一次说过：“我只要安静和休息。”可惜和他的愿望相反，笛卡儿的身体和脑子一样，没有一刻停息。圣·马丁节前夕的三个梦，启示他坐标几何的基本思想，不过他并不急于整理发表。他渴望投身到生活的海洋中去体会人生的意义。

1620年春天，笛卡儿参加有名的布拉格之役，经历了几次真正的战斗。第二年，他对倥偬的戎马生活感到厌倦。不过，巴黎同样引不起他的好感。那里炮火连天，瘟疫流行。只有北欧，既太平又洁净。笛卡儿变卖了财产，身边只留下一名童仆，决定去那里一游。事情安排停当，就雇了一条海船前往北海的东弗里西亚群岛。不料船上的水手是一伙歹徒。他们见乘客是位气宇轩昂、风度翩翩的法国上流社会绅士，心中不由暗暗高兴。只见他身穿入时的波纹绸上衣，戴一顶插了两根漂亮的鸵鸟羽毛的大檐帽，手里玩弄着一把和他身份相称的宝剑。他身后跟着一个乳臭未干的小仆人，背着一个沉甸甸的箱子，看样子油水不少呢！这真是天赐的良机，他们打算劫掠笛卡儿的财物，然后把主仆两个扔下海去喂鱼。可惜他们没有料到，这位雍容华贵的绅士竟是个语言学大师。他完全懂得他们私下的谈话。没有等他们准备就绪，笛卡儿唰地拔出寒光闪闪的宝剑，逼着他们把船驶返原地。一时被吓得不知所措的歹徒，只好乖乖听命。笛卡儿幸运地逃脱了死亡的一次突然袭击！

第二年冬天，笛卡儿悠悠自在地来到罗马游览。这些日子，这个罗马天主教廷所在地车水马龙，熙来攘往，热闹得像一锅沸腾的开水。大街小巷，戴假面具的，玩杂耍的，载歌载舞的，应有尽有，目不暇接。天主教会正热烈筹办每一百年举行一次的盛大庆典。笛卡儿接触到从欧洲各地来接受罗马教皇祝福的普通老百姓。只可惜

他没有见到伽利略。要是这两位当代最伟大的巨人能促膝晤谈一两个星期，各自一定能从对方的思想中大大得益。

如果说笛卡儿早期的生活受教会学校影响，偏重于独自冥思苦想，因此有时候难免犹豫彷徨和耽于空想，那么现在，在无所不包的社会大课堂里，他不止一次地体验过刀光剑影的生死搏斗，也领略到大自然的无比和谐与壮丽。他曾经久久徘徊在伟大历史遗迹的脚下，也在神工鬼斧的艺术宝库中留连忘返，尤其是和哲人名士、能工巧匠广泛的思想交流，大大开阔了笛卡儿的视野。他的思想变得充实了，信念更坚定了。

意大利旅游归来，笛卡儿又心血来潮，跟随萨伏依公爵经受了一次血的洗礼。他在战场上表现得这样出色，以致为了表彰他的功绩，公爵一定要授予他中将军衔。笛卡儿谢绝了这一诱人的荣誉。他心里明白，他上战场浴血奋战就像到各地观光游览，只是为了体验生活，了解人生和在紧张的科学思考之余调剂精神。告别了惘然若失的萨伏依公爵，笛卡儿来到巴黎。

这时，笛卡儿还没有发表过任何作品。不过，他的思想已经通过学术界有影响的朋友们的介绍和传播，遐迩闻名。登门求教和慕名来访的崇拜者络绎不绝。得不到安静和休息，使笛卡儿很苦恼。他再一次来到战场寻找慰藉。这次是和法国国王一起去攻打新教胡格诺派的据点拉罗谢尔。在那里，他结识了路易十三的宰相、红衣主教黎塞留。这位主教大人的活灵活现的形象，读者可以从大仲马的名著《三个火枪手》中看到。他后来为笛卡儿做了件好事，不过并非出于自愿。

战争结束，笛卡儿胜利回到巴黎。这时他已 32 岁。只是由于奇迹般的幸运，他的性命才没有被死神夺走，他的思想才不致被湮没。布拉格或拉罗谢尔的一颗流弹，本来可以轻易地剥夺笛卡儿的历史地位。他开始意识到，如果要达到自己的目标，现在是着手工作的时候了。

这，就是我的书

当时的法国内乱不断，宗教传统势力强大，虽然笛卡儿处处检点自己的言行，他深深感到，在这里没有他活动的余地。他决定再到荷兰去。不是那里的气候更适宜于他的思考，只因为荷兰社会相对安定，资产阶级的影响比较大，是当时欧洲惟一具有思想自由的国家。在历史上：提倡唯物主义的英国哲学家霍布斯的书只能在荷兰自由刊印；洛克为了逃避保皇党的迫害，来到荷兰避难。荷兰哲学家斯宾诺莎要不是在荷兰，恐怕就难以著书立说。笛卡儿的著作也几乎都是在荷兰完成的。有整整 20 年，他的足迹遍布整个荷兰，他时而在偏僻的小山村默默隐居，时而在乡镇旅店或大城市的冷静角落潜心思考。无论在哪里，他总和某个大学或者图书馆相距不远，以保证必要的工作条件。除了哲学和数学，他还观察天象，考查冰河，计算山高，解剖动物，研究胚胎发育。

有一天，老朋友贝克曼来访问他，敲了几次门都没有人应声。一看，房门只虚掩着，笛卡儿在里面卷起袖子，正专心致志地磨着一把明晃晃的尖刀。笛卡儿看到来客满脸狐疑的神情，就指着身旁一筐正待解剖的兔子说：“这，就是我的书。”

和伽利略一样，笛卡儿主张科学要从事实出发，并且应用于实践，坚决反对当时科学界普遍存在的脱离生活、脱离实际、钻在故纸堆里寻找学问的现象。据说，法国启蒙思想家狄德罗临终留下的最后一句话是：“怀疑是向哲学迈出的第一步。”笛卡儿早已迈过了这一步。他已经摆脱求学时代对知识的怀疑。通过研究和考察，他不但认识到可靠知识的存在，还提炼出得到这些知识的有效方法。更进一步，他召号人们用它们来为人类造福：

“获得对生活非常有用的知识是可能的。和学校里所教的纯思辨哲学不同，我们能够发现一个实用的哲学。通过这种哲学，当我们像了解手工艺人的各种工艺一样，清楚地了解到火、水、空气、

恒星、宇宙和所有围绕着我们的物体之间的作用和力以后，我们同样也能够把这些规律运用于它所适宜的各种用途，从而使我们自己成为大自然的主人和占有者。”

正是基于这种信念，笛卡儿创造了新的几何。他说：

“我决心放弃那个仅仅是抽象的几何。这就是说，不再去考虑那些仅仅是用来训练思维的问题。我这样做是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何。”

笛卡儿并没有就此止步。他还把他的思想推广到科学的其他领域。到20世纪，任何人要是把精力花费在笛卡儿涉猎到的那么多科目上，大概只能成为一个样样稍通、样样稀松的“万能博士”。笛卡儿的时代不是这样。在那个时代，一个有才能的头脑有希望在几乎一切科学领域里取得成就。作为坐标几何的创始人和唯理论哲学的奠基者，笛卡儿还发现光的折射定律；首创神经传导和反射机能的学说；建议帕斯卡做真空试验；……形形色色的问题，一经笛卡儿的头脑和双手，就会产生有意义的成果。特别值得一提的是他关于生物学的思想。他用热、水力、管道、活塞和杠杆的机械作用，来解释人和其他动物的生命。从今天的观点来看，这未免过于简单，但是在当时，这无疑是项非常了不起的成就。理性闯进了这个历来由神秘和迷信牢牢统治的禁区，为近代生物学奠定了基础。

利用拉弗莱舍的老朋友梅森神甫做中间人，笛卡儿和欧洲著名学者进行数量庞大的哲学和科学的通信。只有梅森知道他在荷兰的住址。通过这位神甫，巴黎近郊幽深的明尼兹修道院的一间小小的休息室，成了阅读笛卡儿的来信、进行热烈讨论和争辩的学术中心。笛卡儿的哲学和科学思想，像一股春风，吹绿了被封建专制和教会势力冰封的欧洲大地。

教皇和哥白尼

虽说已经是4月，窗外还纷纷扬扬地飘着雪花。书房壁炉里劈

劈拍拍地窜着诱人的火苗，笛卡儿正夜以继日地对一部名为《论世界》的杰作进行最后的润色。他要补充《圣经》中上帝6天创造世界的不足，提出一个宇宙漩涡学说来解释行星是怎样转动不息并且保持在环绕太阳的轨道上的。用数学和力学知识来解释混沌初开以后宇宙天体的运动和变化，无疑是天文学上伟大的尝试。至于宇宙起源，那时还没有多少观测的基础，议论起来难免猜测和想像多于观测事实。

《论世界》是笛卡儿给梅森的新年礼物。神甫看过它的部分章节，但是没有读过整部作品。巴黎的知识界也翘首盼望它的出版。不过在最后定稿以前，笛卡儿想看一看伽利略的新作。当时伽利略相信教皇乌尔班八世是友好的，认为可以大胆说话了，1632年出版了《关于两大世界体系的对话》一书。一位意大利朋友答应送他一部。不料新书没有收到，却传来晴天霹雳：尽管和有势力的托斯卡纳公爵很有交情，1633年6月22日，70高龄的伽利略还是屈辱地被迫向罗马教廷异端裁判所下跪宣誓：放弃哥白尼的学说。哥白尼的日心说是对鼓吹“地球是宇宙中心”的宗教统治的沉重打击。要是伽利略拒绝发假誓，将会有怎样的下场，笛卡儿只能推测。他想起宣传宇宙无限思想的布鲁诺（1548-1600）被烧死在罗马鲜花广场的命运。这使他不寒而栗。因为在《论世界》里，哥白尼的日心说被看做是一个理所当然的事实。他坚信哥白尼的学说就像坚信自己的存在。如果伽利略为了温和的“异端”思想要被迫下跪，那么他还能期望什么呢？

笛卡儿决定不发表《论世界》，不发表他的一切著作。这不仅是因为害怕，原因要复杂得多。他是虔诚的教徒。他既相信哥白尼，也相信教皇。要他放弃教皇和放弃哥白尼一样不可能。教皇和哥白尼学说中的冲突，暴露出笛卡儿思想上的深刻矛盾。可惜他这一回不打算追根究底，准备妥协。他想把《论世界》推迟到死后发表。他安慰自己，到那时候教皇乌尔班八世大概已经咽气，新教皇也许不会像徒有“好学重才”虚名的乌尔班八世那样粗暴地对待科

学了。

其实，笛卡儿担心的迫害并没有降临。尽管信奉新教的神学家们猛烈抨击笛卡儿，骂他是无神论者，是危险分子，在拉罗谢尔战场上和笛卡儿结识的红衣主教黎塞留下令，无论在法国或者国外，笛卡儿只要愿意写，他的任何著作都可以发表。看来颇有点使人费解，天主教会怎么对待笛卡儿和对待伽利略的态度迥然不同。难道是教会对笛卡儿个人表示特殊的恩宠？当然不是。对于危及教会统治的“异端邪说”，教会从来不懂得什么叫宽容。黎塞留对笛卡儿著作的“恩准”，只是因为他对笛卡儿的某些表现产生一时的错觉。

作为伟大的思想家，笛卡儿无疑看到了封建制度和宗教统治的种种黑暗和弊端。但是当时的资产阶级毕竟比较幼弱，资产阶级革命还处在思想准备阶段，没有能力起来夺取政权。他发觉，除了思想以外，其他的一切都不是他自己力所能及的。为了清静无扰地进行研究，他不愿意去惹麻烦。他在教会和教士们面前，表现得谦恭温顺，并且给他自己规定了一套《暂行的行为准则》：

“服从我国的法律和习惯，笃信上帝恩赐我从小就领受到的宗教信印，……只求克服自己，不求克服命运；只求改变自己的欲望，不求改变世界的秩序。”

这类忠心耿耿的表示，大大麻痹了教会对他的警惕。但是随着笛卡儿著作的陆续发表，尽管他把自己的观点表达得隐晦含蓄，尽量不直接触犯基督教的教义，国王和教会还是看出，笛卡儿的学说是对封建王权和宗教统治的严重威胁。笛卡儿说他笃信宗教，原来是因为他对宗教有了怀疑；笛卡儿声称他不求改变世界的秩序，正因为他存在改变现存秩序的强烈欲望！不难想像，他们是何等的恼怒和懊丧。可是，等到他们气急败坏地向笛卡儿举起屠刀的时候，心中并不稍感舒畅，因为这位封建和宗教的叛逆者已经长眠于九泉之下了。

《方法谈》问世

1637 年是科学史上一个重要的年头。经不住朋友们的反复劝说，那一年夏天，笛卡儿终于同意把他的杰作《更好地指导推理和寻求科学真理的方法谈》(简称《方法谈》)，在莱顿匿名出版。这是他公开发表的第一部著作，也是他一生最伟大的著作。

笛卡儿在《方法谈》中精辟地阐述了自己的科学思想。他提倡理性，提倡科学，主张把科学应用于实践，为人类造福。他反对迷信，反对教条，摒弃脱离实际的烦琐哲学。这些主张反映了 17 世纪法国资产阶级反对封建主义、发展生产、发展科学的历史要求。笛卡儿的科学思想对 17 世纪有决定性的影响。他和伽利略一起，改变科学中的方法论，重新规定科学活动的目标，不仅使科学得到空前伟大的力量，而且把科学和数学紧紧结合起来了。如果没有这种革命性的突破，近代科学要取得这样的惊人成就是不可想像的。

在《方法谈》的附录中收编了笛卡儿的 3 篇重要论文：《屈光学》、《陨星》和《几何学》，其中《几何学》一文，介绍了他长期酝酿形成的坐标几何的思想。虽然在荷兰的通信中他传播了许多数学思想，《几何学》却是他写的惟一的数学著作。

脱离了中世纪襁褓的欧洲，经过文艺复兴运动的推动，科学技术有了很大的发展。开普勒①发现行星绕太阳运行的轨道是椭圆的；伽利略认识到子弹从塔上平射出去的轨道是抛物线；物体本身的形象和物体运动的轨迹也大都是曲线。对这些曲线进行定量研究已经成为迫切的需要。笛卡儿毕生致力于寻找一种“包含代数和几何两门学科的好处而没有它们的缺点的方法”来解释自然现象，他正是在这种历史背景下发明了坐标几何。

---

① 约翰内斯·开普勒（1571-1630）是德国天文学家，在他的老师、丹麦天文学家第谷（1546-1601）大量天文观测工作的基础上，发现了行星运动的三定律。他的研究成就为牛顿建立万有引力理论打下基础。开普勒在体积计算上作过大量工作，是积分学的先驱者之一。

开始，笛卡儿仿照韦达，用代数方法分析确定的作图问题。进一步，他研究不确定的问题。这就产生了变数的思想。答案也就由点变成具有特定性质的曲线。在代数上相应得到关于已知任意长度 x 和未知长度 y 的方程。这样就把几何图形和代数方程联系起来了。在这个过程中，笛卡儿建立了坐标系。他最早建立的坐标系是斜坐标系，而且 x 和 y 只取正值，因此，图形局限在第一象限内。不过笛卡儿已经知道，坐标系选取得好，可以简化曲线的方程，而图形的几何性质和坐标系的选取无关。后来他研究了一些具体的曲线类型，也相应地致力于代数方程理论的研究，得到不少有意义的结果。

经过后人的发展，就有了今天中学里的解析几何。在坐标系里，一对有顺序的实数对应着平面上的一个点；一个二元方程对应着平面上的一条曲线。于是，研究这些曲线就可以用研究相应的方程来代替。这正是坐标几何的基本思想。

把“数”和“形”紧密联系在一起的坐标几何，成为一把锋利无比的双刃刀。几何概念可以用代数表示，几何的目标可以通过代数达到；反过来代数语言有了几何的解释，可以直观地掌握这些语言的意义，从中得到启发去提出新的结论。从此以后，数学就以前所未有的速度趋向完善。可以说，17 世纪以来数学的巨大进展，在很大程度上要归功于坐标几何的创立。

我们在学习解析几何的时候知道，一条直线和一个圆或相割或相切或相离，代数上相应的二元二次方程组分别有两个实数解、惟一实数解、没有实数解，这使我们对几何和代数两方面的问题都有了清晰的认识。我们再举一个例子来说明代数和几何结合起来的好处。在几何上，椭圆、抛物线和双曲线是外形极不相似的三种曲线，很难看出它们之间有什么内在的联系。可是从代数上说，它们的方程却有二元二次方程这种统一的形式：

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0。$$

当方程的系数适合 $B^2 - AC < 0$ 时，它表示椭圆；当 $B^2 - AC = 0$ 时，它表示抛物线；当 $B^2 - AC > 0$ 时，它表示双曲线。代数式 $B^2 - AC$

值的变化超过某一界限会引起曲线类型的改变；而这些曲线在代数上的区别只在于方程系统 B^2-AC 的正负号！根据这个分析，我们就不难理解，为什么当人造卫星的初速度等于第二宇宙速度①的时候，卫星的轨道是抛物线；小于第二宇宙速度的时候，轨道变成椭圆；而大于第二宇宙速度的卫星轨道就成了双曲线的一支。

笛卡儿的坐标就是变量。由于代数问题中变量数目不受限制，物理意义各种各样，后来产生了在科学上极为重要的 n 维空间的概念。$n=2$ 时可视为平面的几何；$n=3$ 时可视为空间的几何；$n=4$ 时，可解释为空间三个坐标加上时间这个变量而得到经典力学和相对论的几何。n 维空间就超出了生活在三维空间的人们的几何直观。所以笛卡儿不是改造几何，而是创立了一种新的几何，这种几何由于它的抽象性，可以处理像分析电路网络或安排经济生活这样形式极不相同的各种问题，因此比过去的几何具有无可比拟的优越性。

随着坐标几何的创立，以研究变量为重要特征的近代数学诞生了。可惜，坐标几何的主要思想并没有立即被当时所有的数学家所理解和接受。一个重要原因是，笛卡儿把《几何学》写得十分难懂。虽然为了便于人们阅读，他用法文而不用学术界惯用的拉丁文来写作，但是他故意搞了许多含糊不清的地方，为的是让“欧洲几乎没有一个数学家看得懂他的著作”！他解释说：“对于那些自命为无所不知的人，我如果写得使他们能充分理解，他们就会说，我所写的都是他们已经知道的东西。”作图法和证明都写得极为简略。他把自己比作建筑师，只制定计划，指出该做哪些工作，而把手工操作留给木工和泥瓦匠。他说，这样做也是为了不剥夺读者自己进行探索的乐趣。他在书中给出许多例题，但是删去多数定理的证明。他认为只要仔细考查这些例题，定理就不难证明。他强调说，这样来学习，效果更好。

---

① 第二宇宙速度约 11.2 公里/秒。火箭速度达到这个速度就可克服地球引力的束缚，离开地球飞向宇宙空间。

《方法谈》开创了数学的新纪元，改变了科学的历史进程，也为笛卡儿赢得了巨大的荣誉。这部巨著以其秀美清逸的文笔和巨大的思想魅力吸引读者。它不但成为科学上的不朽名著，同时是哲学和文学的经典著作，即使在非科学家中也大受欢迎。随着时间的推移，《方法谈》越来越显示出它的极端重要性。人们纷纷来学习和钻研它的思想，使这部杰作跻身于17世纪最出名、最有影响的著作之列。

告别荷兰

1641年秋天以来，笛卡儿一直安静地住在靠近海牙的一个小村庄。北海怒号的寒风伴随着咆哮的海浪，似乎更加适宜于他深入思考。那一年，他发表了名著《形而上学的沉思》。在给梅森的信中他这样写道：

“我希望阅读这些沉思的人，不知不觉地习惯于我的原则，使其在发现这些沉思推翻了亚里士多德之前，已经承认它们是真理。”

可惜笛卡儿并没有如愿以偿。远的不说，堂堂的荷兰乌德勒支大学校长读过以后不但不习惯笛卡儿的“原则”，还指控他是无神论者。事隔不久，乌德勒支市议会甚至要求拘捕他。笛卡儿痛苦地发现，原来荷兰也并不是科学家的世外桃源啊。他毫不客气地进行反击，痛斥这群“不学无术的挡道者”。历史的潮流毕竟是阻挡不住的。在荷兰和欧洲各界人士的声援下，市议会被迫撤销原议。

1644年，笛卡儿又一部重要著作《哲学原理》在荷兰出版。书中详细讨论了物理学的运动定律和漩涡理论，其中包括了未发表的《论世界》中的部分材料，不过他尽力修改得不致使教会暴跳如雷。在笛卡儿哲学中，上帝虽然仍旧被认为是宇宙的创造者，但是作用已经明显削弱，不再是万物的主宰。上帝一旦创造了宇宙就不再干预，听任万物按一定的自然规律去运动了。笛卡儿的机械唯物主义哲学受到科学家的热烈欢迎，他那清秀典雅的文字，使《哲学原

理》的精装本甚至成为贵妇人梳妆台上时髦的点缀品。

为了把《哲学原理》带进课堂，笛卡儿特地把它写成教科书的形式。可是，他的希望又一次落空。荷兰加尔文教派①对革命性科学思想的仇视不亚于罗马天主教会。他们迫使乌德勒支法院下令禁止在大学讲授笛卡儿哲学。不过，法院也不准他们著文攻击笛卡儿。当然，笛卡儿的思想决不是法院一纸判决所能够扼杀的。他的著作不仅在当时的欧洲，而且对后来的牛顿，都有巨大的影响。10年以后，牛顿在剑桥大学所学的哲学，正是笛卡儿的《哲学原理》，它使牛顿认识到研究运动的重要性。

正当《哲学原理》在欧洲引起强烈反响的时候，笛卡儿在伊格蒙过着悠然自得的隐居生活。他一边在园子里种种花草，一边沉思。荣誉已经远远超过他想要的，但是他仍念念不忘哲学和数学的思考。他和欧洲的知识界继续进行科学通信，而他的思想常常是根本性和革命性的。

尽管笛卡儿已经年过半百，两鬓如霜，他还是那样倜傥不羁。他曾经和几位女性有过超乎寻常的关系，不过他不愿以沉思默想所必需的安静和休息去换取一位娇纵的妻子。有人因此说他心肠硬。这有点道理。将军的荣誉他不屑一顾，妖艳的美色他无动于衷。但是他的仆人爱戴他。他们离开笛卡儿很久以后，笛卡儿依然关怀着他们的生活。跟随他一块坐船去东弗里西亚的那个童仆，在笛卡儿逝世以后哭泣了好几天。笛卡儿绝不是铁石心肠。他只是渴望安静和休息。

但是笛卡儿企求的安静和休息总是不牢靠。瑞典的克里斯蒂娜女王，已经听到了他的大名。这位年方19的女王，肌肉发达，结实得像个伐木工人。她是个无情的猎人，还是个好骑手，据说对古典语言也颇有造诣。她对寒冷的反应很迟钝。像蛰居的青蛙，她能够

① 加尔文教派是基督教的一派，宣扬一切由上帝旨意决定，废除主教制，适合当时新兴资产阶级的利益，在英国和荷兰流行。

在寒冬腊月不生火炉的图书馆里一动不动地坐上几个钟头。谄媚的大臣们索性怂恿她把窗户打开，让美丽的雪花飘进来和她作伴。她一天只需要5小时睡眠，因此拍马屁的官员一天19个小时在她面前像穿火圈似地跳跳蹦蹦。她对虚荣的渴望甚于对知识的追求。一看到笛卡儿的著作，她就打定主意，一定要召这位爱睡懒觉的大哲学家来当自己的指导教师。

如果笛卡儿没有丝毫的虚荣心，不为王室的尊贵荣耀所动，他或许可以顶住女王的讨好；如果荷兰的加尔文教派比罗马天主教会宽容，他也不会屈服于克里斯蒂娜的引诱。笛卡儿坚持到1649年春天，当瑞典的海军上将亲自坐船来邀请，他还没有答应。他回到法国，想为祖国服务。可是这时候正值法国内战爆发，教会也对他爱理不理。笛卡儿只得怏怏返回荷兰。到了10月，他终于改变主意。他想，有尊贵的瑞典女王撑腰，传播自己的思想大概不至于这样困难重重。他无限眷恋地向心爱的小园子投下最后的一瞥，加上锁，永远告别了伊格蒙。

最后的磨难

笛卡儿在瑞典首都斯德哥尔摩受到热热闹闹的欢迎。使他感到欣慰的是，他不必住在王宫里。可是好景不长。几位好友，其中一位就是法国大使蔡纳特，扑灭了他保留一点个人小天地的最后希望。他们执意要笛卡儿和他们一起居住，以便互相照应。要糟糕的事情还在后头。别出心裁的女王决定早晨5点钟开始学习哲学。笛卡儿不得不在睡意正浓的时刻钻出暖烘烘的被窝，被人连拉带拽地塞进按时来接他的马车。顶着呼啸的寒风，穿过阒无一人的广场，来到阴森森的王宫。等他哆哆嗦嗦走进冰窖似的图书馆，克里斯蒂娜已经不耐烦地在等着迅速开始她的课程。据当时斯德哥尔摩的居民回忆，瑞典从来没有经历过像1649年那样寒冷的冬天。然而克里斯蒂娜的皮肤和神经似乎和普通人不同，她对这一切毫无知觉。她要笛

卡儿保持那个可怕的时间表。笛卡儿想在下午补睡一觉，可是他刚进入甜蜜的梦乡，又被一阵急促的摇晃所惊醒：女王要和他商量有关创办瑞典皇家科学院的事宜。可怜的哲学家再一次被从被窝里拖出来，送到克里斯蒂娜面前。

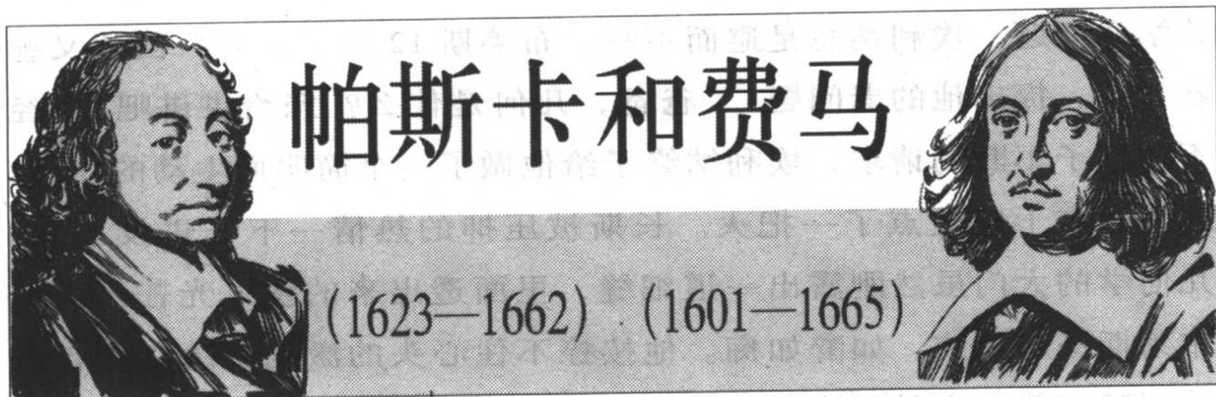
精疲力竭的笛卡儿立刻明白，自己钻进了马蜂窝。出于对王室的敬畏，他不愿直截了当地向女王提出辞呈，可是他每次转弯抹角地谈到这个问题的时候，克里斯蒂娜像对寒冷一样，毫无反应。他多么向往拉弗莱舍那无限美好的早晨啊！沙特利神甫决不会冒冒失失地闯进房间来检查他的起床动作是否利索。现在，除非奇迹，谁也拯救不了他啦。

如果年轻的女王果真是个专心致志地学习的高材生，笛卡儿或许还可以稍微得到一点安慰。可惜，事实恰恰相反。有一次笛卡儿用希腊文给克里斯蒂娜讲课，不料号称优秀古典语学家的女王居然连希腊文的普通文法都感到困难。女王头上的一点荣光在他心目中迅速消失了。又有一次，克里斯蒂娜见笛卡儿的著作《音乐提要》即将完成，要他创作一首芭蕾舞曲供宫廷宴乐的时候欣赏。他断然拒绝了这个荒唐的要求。窒息的气氛和被奴役支使的地位，使他的幻想彻底破灭了。

不久，蔡纳特患了肺炎。笛卡儿昼夜守护着他。蔡纳特康复以后，笛卡儿却病倒了。女王惊慌起来，派来最好的医生。笛卡儿不许他们走进房间。他的身体愈来愈虚弱。最后他同意由一位好朋友来给他放血。谁知，这反而使病情更加恶化。哲学家一生竭尽全力为人类争取理性的权利，面对死神的召唤，他异常平静。朋友们见他垂危，决定为他举行最后的圣礼。神甫询问他是不是要作临终祈祷，他把眼睛睁了一下，就永远阖上了。这是1650年2月11日。窗外正下着鹅毛大雪。这时候又呜呜咽咽地刮起北风。整个斯德哥尔摩披上白色的素服，向这位巨人表示最后的敬意。

克里斯蒂娜后悔不已。17年以后，她早已经放弃王位，笛卡儿的遗体被运回法国，重新安葬在巴黎的先贤祠。鉴于在和瑞典政府

交涉过程中财政大臣科尔倍尔表现了杰出的才能，法国政府同意，笛卡儿右手的遗骨由科尔倍尔留作纪念。这位为数学开辟航道的巨人，在生前渴望安静和休息。可是他的安静常常在血肉横飞的战场上寻求，他的休息是在偏僻的角落里进行艰苦的思考。现在，他得到了安静和休息。预先安排好的墓地演说，由于王室急急忙忙下来一道命令，被突然取消了。虽然在笛卡儿生前红衣主教曾经允许他的著作出版，现在它们却被教会列入禁书目录之中。的确，占有一位伟人的思想，要比占有他的遗骨困难得多啊！



这是惊人的，起源于赌博的概率理论，竟会成为人类知识的最重要的对象。

——拉普拉斯

我找到了许许多多极其优美的定理。

——费马

出类拔萃

在法国中南部僻静的克莱蒙费朗城，有一座雅致的白色楼房，四周大树环抱，前面绿草如茵。1623 年 6 月 19 日，一个婴儿呱呱地哭叫着在这里诞生。他就是法国杰出的数学家、物理学家、哲学家和文学家——布莱斯·帕斯卡。

布莱斯的父亲埃利纳·帕斯卡是地方救护会会长，学识洲博，乐善好施，在当地很有名望。母亲安东尼达·白戈妮是位心地善良、容貌美丽的妇女。可惜红颜薄命，在一次突发的急病中，她撇下年仅 4 岁的布莱斯和他的姐妹吉尔帕蒂和杰克琳，猝然去世。

1630 年，帕斯卡一家由克莱蒙费朗迁到巴黎。这时候布莱斯刚 7 岁。孩子早熟，普通学校里的课程他学起来毫不费力。可是，他体弱多病。父亲为了避免孩子用脑过度，亲自指导他学习，只教他古典语言，不让他接触数学。谁知“弄巧成拙”，埃利纳对数学讳莫如深的态度，反而激起孩子强烈的好奇心。他常常询问父亲有关

数学的问题，埃利纳总是避而不答。布莱斯12岁了。有一回他又缠着父亲，提出他的老问题："爸爸，几何是什么？您给讲讲吧！"经不住孩子不断的请求，埃利纳终于给他做了一个简明而生动的介绍。这不啻在干柴上点了一把火。长斯被压抑的热情一下子迸发出来。几何学的大门虽然刚露出一道细缝，里面透出来的诱人光芒已经使布莱斯头晕目眩，如醉如痴。他按捺不住心头的激动，决心用自己的智慧和毅力去敲开这扇庄严的大门。

布莱斯·帕斯卡钻研几何的事迹，在数学史上传为美谈。一开始，没有任何书本暗示，他证明出一个重要的几何定理：三角形三内角之和等于两直角。这一了不起的成就使他大受鼓舞。父亲更是高兴得热泪盈眶。这件事似乎还不够神奇。据姐姐吉尔帕蒂说，布莱斯在看到欧几里得《几何原本》以前，就独立发现了这本书的前32个定理，甚至连顺序也完全相同。"三角形三内角之和等于两直角"，恰好是《几何原来》的第32个定理。一般认为，布莱斯无疑是独立地发现和证明了《几何原本》的一部分定理，但是吉尔帕蒂的说法可能言过其实，因为这几乎是不可思议的事。

两年以后，14岁的布莱斯就跟随父亲到明尼兹修道院，参加梅森神甫主持的每周讨论会。会员都是著名的学者：费马、德札尔格①、罗贝瓦尔②、……笛卡儿从荷兰和他们保持经常的通信。这个小团体后来发展为自由学院，到1699年演变为法国科学院。

神秘六边形

正当小帕斯卡在几何上披荆斩棘，迅速向新高峰攀登的时候，老帕斯卡在事业上意外地遇到麻烦。由于极端的诚实和正直，在一

① 杰拉德·德札尔格（1591-1661）是法国几何学家。他联系建筑工程开创射影几何研究，引入一些新的概念，建立射影几何一系列经典定理。

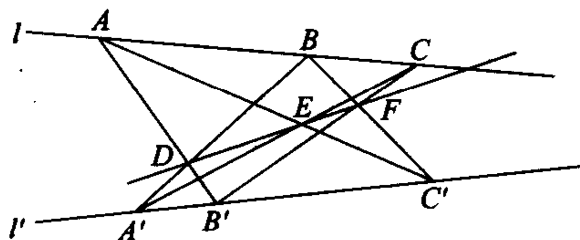
② 罗贝瓦尔（1602-1675）是法国数学家，法兰西学院数学教授吉尔·佩尔松的化名，他在面积与弧长计算和求一些曲线切线上得到一系列成果。

项征税问题上，他同红衣主教黎塞留发生了争执。读者一定记得，慷慨许诺过笛卡儿可以自由发表自己著作的就是这位主教。不过，这一次他似乎没有那么宽容。埃利纳只得带着全家到乡下躲起来。事情后来是怎样了结的，说法不一。据说是美丽的杰克琳拯救了她父亲和家庭。有一次主教去看演出，一位年轻女演员的精彩表演使他大为倾倒。唤到面前来一问，原来她是埃利纳的小女儿。主教二话未说，痛快地把旧账一笔勾销，还把埃利纳安排到法国北部城市鲁昂的税务局工作。

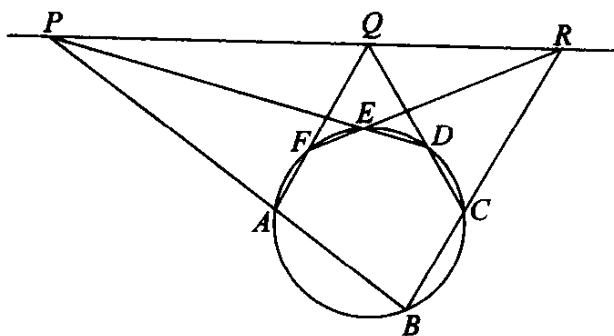
课税员的工作相当辛苦。埃利纳常常抱着账本一直计算到深夜。小帕斯卡在旁边默默地观察着父亲的工作，他又一次表现出超乎寻常的才能。他发现一切加减运算都可以用机械来完成。经过一段时间的摸索和改进，他终于创造出世界上第一台可以实际使用的计算机。这是一台手摇操作的齿轮系统。每个齿轮有 10 个齿。顺时针方向旋转是加，逆时针方向旋转是减。齿轮每转过 10 个齿，带动旁边的高阶位的齿轮转一个齿，数字就进了一位。这样，一个年刚 18 岁的孩子成了数字计算机的发明者。

在这以前，小帕斯卡废寝忘食的研究还取得一项重要进展。他发现了几何学中一个非常优美的定理——帕斯卡定理。好在它的一个特殊情形只用直尺就可以说明，我们在这里把这个定理介绍一下。

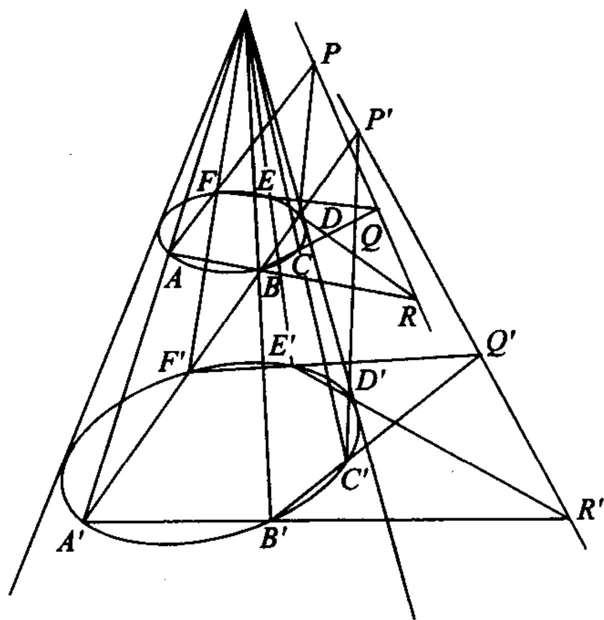
设有 l 和 l' 两条不平行的直线。在它们上面各任意取三点 A、B、C 和 A'、B'、C'。分别把 A 和 B'、A' 和 B、B 和 C'、B' 和 C、C 和 A'、C' 和 A 连接起来，就得到三对直线：AB' 和 $A'B$，BC' 和 $B'C$，CA' 和 $C'A$。如果每对直线都有一个交点，设它们分别为 D、E、F。帕斯卡证明了：D、E、F 三点必定在同一条直线上。进而他把这三



对直线换成圆内接六边形的三对对边，帕斯卡又证明：如果这些对边的延长线分别相交，那么，它们的交点也在同一条直线上。他把这种六边形称为“神秘六边形”。



帕斯卡并不就此满足。他利用德札尔格所发明的投射法把这个定理进一步推广。设想一只灯泡被一张开了一个小孔的纸遮住，于是通过小孔射出一束圆锥状的光线。如果取一张纸伸到这束光线中去，那么根据纸片角度的变化，在纸上可以看到光束的边界呈现不同的图形：圆、椭圆、抛物线和双曲线。这些都是圆锥曲线。帕斯卡发现，上述定理中圆内接六边形的这种性质，如果把圆换成其他的圆锥曲线，例如椭圆，同样是正确的。这在直观上并不难接受。从下图可以看出，如果在光束和纸片之间插进一块玻璃，在玻璃上



画一个“神秘六边形”，当光束穿过玻璃投射到纸面上的时候，出现的就是“神秘六边形”的影子。这影子也是一个“神秘六边形”，因为它的三对对边的交点也在一条直线上。

帕斯卡发现这个有趣的定理那年才16岁。根据德札尔格建议，聪明的帕斯卡环绕这个定理写了两篇论文，把有关圆锥曲线的不下400条定理——其中包括阿波罗尼奥斯和其他前人的成果——用投射法作了系统总结，把它们归纳成少数几条基本定理。论文所涉及的是和过去希腊几何完全不同的全新领域——射影几何①。这里研究的图形，它的线段长短和角度大小，在射影对应下可以不同，但是在射影对应中图形的某些性质仍旧保持不变。例如，把圆换成其他的圆锥曲线，它的内接六边形三对对边的交点共线的性质是始终保持的。可惜这两篇珍贵的文稿从来没有发表，并且旋即失传；其中的一篇只有薄薄8页，题为《圆锥截线论》，于1779年重新找到。德国数学家莱布尼兹曾经看到过它的手抄本，还对帕斯卡的外甥谈起过里面的内容。笛卡儿在1640年读过这两篇论文，可是他不相信，这样出色的论文竟会出自一个16岁孩子之手！

双重折磨

年轻的帕斯卡为这一连串令人惊羡的成就付出沉重的代价。通宵达旦的工作使他的健康遭到极大损害。从17岁起，他的生活几乎每天都在难忍的病痛中度过。严重消化不良引起钻心的胃痛，把他折磨得汗如雨下。长期的失眠，使漫漫长夜成为可怕的恶魔。更糟糕的事情还在后面：宗教狂热开始感染帕斯卡的家庭。这并不奇怪。当人类智慧的阳光还不能透过层层迷雾把世界真面目揭开的时候，宗教就有它存在的空间。当生活的道路崎岖坎坷，而人们还无法掌

① 射影几何是几何学的一个分支，主要研究图形在射影变换下的不变性质。

握自己命运的时候，迷信就会乘虚而人。在当时名目繁多的教派中有一个叫詹森派。它由荷兰神学家科尔内留斯·詹森所创。詹森派既不属于天主教，也不是新教。它偏激狂热，蔑视意志自由，鼓吹神力不可反抗。信徒们为表示忠诚，要通过各种方式虐待和折磨自己。十分不幸，好端端的帕斯卡竟迷上了这乖怪离奇的教派。原因虽然是多方面的，但是他体弱多病无疑起了重要作用。限于当时的医学水平，医生们开出的种种处方解除不了帕斯卡的病痛，他只好求助于神。宗教成了他摆脱疾病无情折磨的救命稻草。从 23 岁起，帕斯卡从数学研究的高峰一步步陷入詹森派的泥潭而不能自拔。这位数学史上罕见的天才，在他短促的生命历程中，从此遭受着病魔和宗教狂的双重折磨。

但是天才的火花并没有熄灭。他还要为物理学作出贡献。他对重力和密闭液体压强的传递等进行一系列重要试验，发现著名的关于液压传递的帕斯卡定律。意大利物理学家托里拆利做了一个著名实验，测定一个标准大气压的水银柱高度为 760 毫米。帕斯卡进一步把它引申。他建议姐夫彼埃尔带着气压计到家乡附近多姆山上去测量大气压强。他认为，由于高度升高，气压减小，水银柱的高度应该随着下降。后来帕斯卡和妹妹杰克琳在返回巴黎的时候也做了同样的实验。

这时候父亲已经退休。不久帕斯卡和杰克琳来巴黎和他住在一起。有一次浪迹四方的笛卡儿来帕斯卡家访问。笛卡儿当时是誉满全球的大学者；帕斯卡比他年轻近 30 岁，但是在科学界也已经头角崭露，蜚声遐迩。他们两人从数学、物理、文学，一直讨论到哲学。临别的时候笛卡儿还真挚地给这位年轻朋友提出不少忠告。他劝帕斯卡学他的样子，每天躺到上午 11 点钟起床；对于时时给帕斯卡带来烦恼的胃，笛卡儿建议他只喝肉汤，不要吃别的食物。可惜这些健身之道听起来近乎怪诞，帕斯卡没有重视。

在巴黎住的时间不长，全家又回到克莱蒙费朗。家乡清幽的气

氛比豪华的巴黎更加吸引人。在家乡，帕斯卡开始创作《思绪录》。这是法国文学史上一部自我暴露和自我剖析的不可多得的杰作。从中我们可以清楚地看到帕斯卡矛盾的性格：他热爱大自然，热爱生活，可是他却不自然地压制着这些正当的欲望。为了做到这一点，他只能到怪诞的詹森教派的教义中去寻求支持。怪不得心理学家说，乖谬的教义和反常的生理现象是一对难舍难分的孪生兄弟。

在克莱蒙费朗住了两年，全家又来到巴黎。第二年父亲不幸病逝。杰克琳在帕斯卡支持下进了波特罗耶尔的修道院。不久，她作为女修道院的圣职志愿人，不断来动员她哥哥也去波特罗耶尔，搅得帕斯卡心绪不宁，思想斗争异常激烈。1654 年 11 月 23 日，他独自乘了一辆四驾马车，在巴黎附近的乡间道路上狂奔。在通过纽莱河上一座桥的时候，领头的一匹马突然越过栏杆，跃入河中。幸亏挽绳一下子被绷断，马车仍旧停留在马路上。这一事件引起帕斯卡的强烈震动。他认为能逃脱这场横祸，无疑是神的意志——警告他赶紧在世俗生活上悬崖勒马。他决定皈依詹森教派，并且在贴胸处挂起用羊皮纸做的护身符，以使自己克服淫邪的诱惑，以及时刻记住上帝把他从地狱之门拯救出来的“伟大恩典”。从此他永远摆脱世俗，虔诚地来到波特罗耶尔，过起清心寡欲的修道者生活。值得庆幸的是，在这以前，他对数学所作的最重要的贡献已经完成。他和费马一起创立了概率论①的数学理论。这一成就使他在数学史上享有不朽的地位。

皮埃尔·费马

和帕斯卡一起创立概率论的费马是帕斯卡家的老朋友，两人有极亲密的友谊，常年保持着书信往来。

费马的一生很平静，没有什么戏剧性的插曲。父亲杜美尼克是

① 概率论是研究偶然性事件发生可能性的数学分支，它可以预测某些系统未来的情况。



费马、帕斯卡和他们的朋友

位皮革商人，还是法国西南部小城蒙托邦附近小镇皮厄蒙的行政长官。母亲克拉拉·德朗出身于议会律师的家庭。皮埃尔·费马于1601年8月17日诞生于皮厄蒙。他从小在家里接受教育。后来为了担任公职的需要，来到法国南部城市图卢兹继续他的学业。他一生安分守己，不爱出头露面。由于缺少一位像帕斯卡的姐姐吉尔帕蒂那样的人来给后代讲述他童年的奇迹，因此除了作为学生，没有别的记载流传下来。当然，从他获得的成就来判断，他在少年时代一定是聪明绝顶并且具有惊人的直觉能力。他在数学特别是数论中出神入化的工作，不能从他的学校教育里去找原因。因为在费马当

学生的时候，他最伟大的工作所属的那些领域的大门还是完全紧闭着的。

1631年5月14日，费马任图卢兹地区咨询委员。同年6月1日，他和母亲的小表妹路易丝·德朗小姐结婚。婚后生有一男二女。儿子后来成为科学遗嘱的执行人。两个女儿先后进了修道院。1648年，他晋升为图卢兹地方议会的王室律师。1665年1月12日在图卢兹附近的小镇卡德雷斯逝世，享年64岁。

这位诚实正直、一团和气的学者，在数学史上有一则美丽动人的故事，就是他在从事律师工作之余所进行的数学研究。

作为纯粹数学家，牛顿在发明微积分的时候达到了顶峰。这项伟大创造也独立地为莱布尼兹所完成。但是，这样说并不夸张：早在牛顿出世前整整13年，在莱布尼兹呱呱坠地前17年，费马已经形成和应用了微积分的主要概念和方法。他在1637年的手稿《求最大值和最小值的方法》给出求函数最大最小值和求曲线的切线的方法，也就是微分学的方法。由于他和帕斯卡都求得过前几个自然数 m 次幂的和，他也就解决了幂函数积分问题。他还把幂指数推广到分数和负数的情况，这就能计算双曲线围成的面积。这说明他掌握了积分的方法。可惜费马在微积分和坐标几何方面的著述都是在他去世以后才由他儿子整理发表的，这不能不削弱他在当时本可以发挥的巨大影响。

费马和笛卡儿各自独立地发明了坐标几何。尽管他们交换意见，他们研究坐标几何的目的和方法却显著不同。笛卡儿批评希腊的传统，主张同它决裂。费马着眼于继承希腊人的思想。认为自己的工作只是用代数形式来表达希腊几何学家阿波罗尼奥斯关于圆锥曲线的研究。真正认识到代数威力的是笛卡儿，可是他开始只着重于几何作图问题；费马则强调轨迹的方程，现在看来这无疑更为恰当。在对曲线进行分类的时候，费马纠正笛卡儿的一个错误。他指出：对曲线分类应该根据方程的次数而不是其他，如一次方程表示直线，二次方程代表圆锥曲线。笛卡儿和费马在学术上的分歧导致双方长

期的激烈争论。在争论中，笛卡儿常常意气用事，语言尖刻，甚至讽刺费马是“我们的极大和极小大臣”。可是我们这位大律师始终心平气和，保持着应有的礼貌。后来他俩的关系有所缓和。费马在1660年写了一篇文章，在指出笛卡儿的《几何学》中的一处错误的同时，诚恳地说，他是这样佩服笛卡儿的天才，即使他有错误，他的工作甚至比别人没有错误的工作更有价值。可惜已经去世的笛卡儿不像费马这样宽宏大量。

费马最伟大的工作是数论，或者用高斯朴实无华的名称：算术。

在今天小学的教科书中，“算术”的内容在希腊时代被分成不同的两部分：算法和算术。前者一般是有关贸易和日常生活中应用的计算；后者就是费马和高斯意义上的算术，它研究数的性质。费马认为算术被人们忽视了。他抱怨说，几乎没有什么人提出或者懂得算术问题。他相信，算术有它自己的特殊园地：整数论。他的辛勤劳动为算术奠定基础，并且决定了算术在高斯以前100多年的发展方向。

人们关于貌似简单的正整数研究虽然已有很长的历史，但是对它们的认识还很不够。一些长期未解决的问题往往乍看不难，实际上却极难解决。为了证明一个有关正整数的命题，数学家往往不得不先发掘代数和分析中许多微妙而深奥的定理，甚至建立全新的数学概念和普遍有效的数学方法。结果新兴的庞大的分支和如林的数学定理掩盖了它们发端的原始问题。这些导源于“朴素的”算术问题的新数学常常同物理世界有密切的联系，并且可以应用在数学的其他领域，特别是计算数学。说到数论对数学乃至科学技术，从而对整个人类社会巨大的积极作用，我们不能不提到数论研究的先驱费马。

要了解费马，最好从所谓“费马数”说起。请看下面的数列：

$$3, 5, 17, 257, 65537, \cdots$$

它们又可以表示为：

$$3=2^1+1,\ 5=2^2+1,\ 17=2^4+1,$$
$$257=2^8+1,\ 65537=2^{16}+1,\ \cdots$$

这些数除了1和它本身以外，没有别的整数可以整除它，所以是素数。于是费马就猜测：所有形如 $2^{2^n}+1$ 的数，后人称为费马数，都是素数。不过，费马坦率地承认，自己不能证明这个命题。事实上，他后来也对这个命题的正确性发生了怀疑。在费马去世67年以后，欧拉证明了 $n=5$ 时 $2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297=641\times6700417$ 不是素数。

几乎整整过了200年，1796年3月30日，一位18岁的德国青年卡尔·弗雷德里希·高斯解决了一个同初等几何有关的问题：用圆规直尺作出一个正十七边形。这是2000多年来许多数学家竭力追求的目标。他同时还证明了：当多边形的边数或者是费马素数，或者是不同的费马素数的乘积，用圆规直尺作边数为奇数的正多边形才是可能的。这就是说，可以用尺规作出正三角形、正五边形、正十七边形、正二百五十七边形、……，或正 $3\times5=15$ 边形、正 $3\times17=51$ 边形，……但是不能作出正七边形、正九边形等。这个成就使高斯异常振奋，以致放弃了他同样喜爱的语言学，选择数学作为自己献身的事业。

所谓“费马小定理”，是费马在数论中另一种类型的发现，它是1640年10月18日费马给好朋友倍西的信中传出去的。这个定理说，如果 n 是任意整数，p 是素数，那么 n^p-n 就可以被 p 整除。举例来说，取 $p=3$，$n=5$，5^3-5 等于120，可以被3整除。

数论上有的定理被认为是“重要的”，而有的定理好不容易才证明出来，却被认为是“无关紧要”的。这是为什么？要说明其中的道理并不容易。首先一个标准，当然不是绝对的，是它可以应用于数学的其他分支；其次是它对数论或别的数学研究有启发作用；第三，它本身在某些方面具有普遍性。费马小定理适合所有这些要求；它对许多数学分支，包括群论①在内，是一个不可缺少的结论。它启发了许多重要的数学研究，甚至是某些研究的直接起因。由于

① 群是反映自然界对称性的数学概念，群论是研究群的性质的数学分支。

它是对任意的整数和素数来说的，所以有很大的普遍性。显然，这样普遍的定理，要发现它是极不容易，也是非常罕见的。

缺少研究整数经验的人，对等式 $27=25+2$ 可能没有什么感受，但是稍有经验的人就会想到，$27=3^3$，$25=5^2$。因此，方程

$$y^3=x^2+2$$

有一个整数解：$x=5$，$y=3$。假如读者想检验一下自己是不是有出众的智力，不妨试试能不能证明：$x=5$，$y=3$，是这个方程惟一的整数解。专家们认为，要解决这个看起来似乎是儿戏般的问题，在智力上的要求比领悟相对论还要高！

方程 $y^3=x^2+2$ 是一个不定方程，因为未知数有两个，而方程只有一个。如果不限制方程的解必须为整数，解这类方程没有任何困难。任意给出 x 一个值，y 就是 x^2+2 的立方根，所以方程的解有无限多个。丢番图首先提出求这种不定方程的整数解或有理数解。于是问题就不同于以前而变得非常困难了。费马说他证明了上述方程只有惟一的整数解，可是没有公布他的证明。他去世后不久，人们找到了他的证明。科学史研究证实，在 1994 年以前除了惟一的一个例外，凡是被费马肯定过的命题，都被正确地证明了。那仅有的例外就是赫赫有名的“费马大定理”。

标志着希腊代数最高峰的丢番图的《算术》，在 1621 年有了它的拉丁文译本。费马在工作之余读的就是这个版本。他有个习惯，在看书的时候把思考的结论简要地旁注在书的空白处。这些空白当然不适宜于写出证明的全过程。后来，他的儿子在 1670 年出版了著名的《页端笔记》。在《算术》第二册上第 8 个问题，也就是由毕达哥拉斯定理引出的求方程

$$x^2+y^2=z^2$$

的有理数解的旁边，人们看到费马用拉丁文写了如下的一段注解：

“相反，不可能把一个立方数分为两个立方数的和，一个数的四次幂不能分为两个四次幂的和；一般说来，高于二次的任何次幂，不能分为两个同次幂的和。我想出了这个论断的一个真正奇妙的证

明，只是这里的空白太狭小，不容我把它写下来。”

这就是费马大约在1637年左右发现的、引起历史上大大小小的数学家注目的费马大定理。用数学记号表示就是：正整数 n 大于2时，方程

$$x^n + y^n = z^n$$

没有正整数解，当然也就没有有理数解。

人们没有见到费马那个绝妙的证明，只是见到他对 $n=4$ 时证明的大意。后来欧拉作出了 $n=3$ 和 $n=4$ 的证明；以后只要对素数 n 来证明了。1823年勒让德①证明了 $n=5$ 的情形；1849年库默尔②引入全新的理想数概念，证明当 $n=37$、$n=59$、$n=67$ 时费马大定理成立。根据他的理论，$n<100$ 时费马大定理成立。到20世纪80年代，利用电子计算机证明 $n<125\ 000$ 时结论成立。当然 n 取上述所有整数的整数倍也都成立。但是这无限多的情形，还不是大于2的一切整数。300多年来不计其数的优秀数学家，付出了艰巨的劳动，还是没有找到问题的答案。20世纪有“神童”之称、创立“控制论”的卓越数学家维纳③，在试图证明费马大定理的时候感叹：“每次我所假设的论证都像愚人金④一样，很快就令人失望了”。鼎鼎大名的数学家勒贝格⑤曾经发表过对费马大定理的证明。起初许多人以为这个大难题果真被这位分析大师解决了。但是后来有人指出他的证明中有错误。这真有点令人扫兴。勒贝格盯着自己有错的证明喃喃地说道：“我想我可以消除这个错误。”可惜他最终并没有成

---

① 安德莱·勒让德（1752-1833）是法国著名数学家，在数学分析、数论等方面都有重大贡献，所著《数论》、《几何初步》对数学研究与数学教学有很大影响。

② 恩斯特·库默尔（1810-1893）是德国数学家，在数论、代数、分析、几何及物理学上都有贡献。

③ 诺伯特·维纳（1894-1964）是美国数学家，他智力早熟，3岁能读写，14岁大学毕业，对现代分析数学、随机数学有重大贡献；1948年前后提出控制论，对科学技术发展有很大影响，被誉为“控制论之父”。

④ 愚人金指黄铜矿石，色黄似金，不识的人误以为是金块，故称愚人金。

⑤ 亨利·勒贝格（1875-1941）是法国数学家。他革新古典微积分观念，提出后人所谓“勒贝格测度”、“勒贝格积分”概念，对现代分析数学作出一系列奠基性贡献。

功。无数大数学家花了大量心血也都没有找到正确的证明。这使不少数学家怀疑费马发现的绝妙证明是不是搞错了。包括高斯在内，不少数学家都认为一定是费马搞错了。

但是，也有许多人认为，我们不能像寓言中的狐狸那样，因为自己吃不着葡萄，就说葡萄是酸的。作为一位"业余的"数学家，费马只满足于自己享受研究的乐趣，并不介意把自己的思想完整地写出来公开发表。他大多数研究成果是通过和友人通信而闻名于世的。他只写过为数不多的几篇论著，有的还是在他去世以后由后人整理发表的。因此，根据他一贯的为人和非凡的才能，我们没有理由怀疑他曾经得到过一个绝妙的证明。

这桩历史悬案的真相究竟如何，读者可以作出自己的判断。但是，令人高兴的是：英国数学家安德鲁·维尔斯经过九年顽强拼搏，终于在1994年证明了费马大定理。他证明费马大定理的论文《模曲线和费马大定理》于1994年10月14日送交普林斯顿的《数学年刊》。一周前，他和他的学生泰勒的合作论文《海克代数的环论性质》已经寄去审查，这是证明上述定理不可缺少的工具。1995年5月《数学年刊》一同发表了这两篇论文，从而宣布困扰数学界350多年的费马大定理已被一举攻克。维尔斯的证明运用了20世纪代数几何与代数数论一系列研究成果，显示了现代数学整体的巨大力量。

涓涓细流

谁会想到一泻千里的大江发端于高山上的涓涓细流？帕斯卡和费马也没有料到，赌徒之间毫不引人注目的争论，居然会发展出一种非常有用的数学理论。这种理论已经几乎深入到人类生活的各个方面；它在近代物理学上的应用，迫使人们重新考虑对物理世界的认识。

概率论最早是由贵族们在赌博中发生的问题引起的。有一天，性喜赌博的德·梅雷爵士向帕斯卡请教几个在赌博中经常遇到的问

题。比如说，同时掷两颗骰子出现两个都是6点的机会是不是超过1/24？

数学家以前没有处理过这类问题。这类现象从个别来看是无规则的。同时掷两颗骰子，谁能预料它们出现的点数呢？这种不确定性给研究带来困难。不过这些不规则现象——在数学上称为“随机现象”——通过大量实验和观察，就其整体来看，却有一种严格的非偶然的规律性。一颗骰子掷下去，出现的点数固然无法事先确定。但是如果投掷次数大量增加，那么出现某一个点数——比如说3点——的机会就非常接近于1/6。同样，一个充满气体的密闭容器，虽然容器内每一个气体分子的速度和方向是杂乱的，因而就个别分子来说，它对器壁所产生的压力是不确定的，它忽儿撞在这里，忽儿撞在那里；忽儿撞得重，忽儿撞得轻；但是这些气体分子的总体对器壁的压力却有其规律性：它们总的压力基本上是一个确定的值。概率论就是从数量上来研究这种规律性。

帕斯卡巧妙地解决了梅雷爵士的问题，并且在1654年7月29日致费马的信中谈到它们的解答。从此，他和费马就这一类问题开始一系列通信，为概率论的数学理论奠定了基础。

概率论的应用决不仅仅是限于在赌博上。正如荷兰科学家惠更斯（1629-1695）在《关于骰子游戏或赌博的计算》一书中指出：“在任何场合，我认为，如果读者仔细考察一下研究对象就会发现，你所处理的不仅是赌博。这里实际上包含着很有趣很深刻的理论基础。”

的确是这样。概率论深入到各个领域，连日常生活中最简单的问题，比如称一个物体的重量，也离不开它。虽然物体的重量是确定的客观存在，可是它真实的数值你却称不出来。我们到商店去买500克糖，实际得到的并不是真正的500克，而只是它的近似值。即使用最精密的天平也无法称出丝毫不差的500克。当我们用某一种仪器对它进行多次测量的时候，任意两次的测量结果往往是不相同的。但是根据概率统计的理论，由各次测量结果可以推算，真实

的重量落在某一个数值范围内的可能性有多大。

在量子物理学①中，同样离不开概率理论，我们说不出某个电子在原子中的确切位置，但是可以计算这个电子出现在某一区域里的机会有多少。随着科学技术的发展，概率论在保险、统计、误差理论、生物学、天文学、近代物理学以至整个工农业生产中得到日益广泛的应用，成为数学几个最主要的分支之一。

智者千虑必有一失

“智者千虑必有一失”，就连最聪明的人也有糊涂的时候。帕斯卡创立概率的数学理论，可是却把它应用于完全错误的方面。

一个人在采取某个行动以前，通常要权衡一下利弊，想想它是不是值得。从数学上说，就是要估计一下“期望”——成果和代价的差额乘以成功的可能性。帕斯卡在他的名著《思绪录》里，利用这个数学理论来为自己选择的生活道路辩解。他说，通过当修道士来争取得到永生的可能性固然极小，但是可能赢得的成果——永恒的幸福——的价值却有无限大。无限大乘上一个很小的数（即成功的可能性）仍是无限大。于是帕斯卡得出结论：这才是一个人真正值得遵循的道路！可悲的是，这位伟大的数学家不知道，企图通过刻苦修行来求得永生，不是机会大小的问题，而是根本不可能。对不可能事件计算“期望”，它的结果当然只能是零。

这不能不说是个极大的讽刺。帕斯卡孜孜以求的，以为是具有“无限大期望”的事业，竟是一场完全虚幻的梦境；而使他在历史上享有无上荣光的数学，他却感到“是那么无用”，甚至“不愿为它多走两步”！至少帕斯卡在去世以前的那些日子采取了这种不幸

---

① 量子物理学是20世纪初兴起的描述微观世界的物理理论，它的数学表示称量子力学。它认为物质世界分立而不连续，物质具有波与粒子二象性，微观粒子服从统计性规律，不能同时准确测定它的位置和速度。量子论在认识分子、原子这些微观世界上取得巨大的成功，是继相对论以后物理学又一次大革命，深刻地影响着人类自然观的发展。

的态度。1660 年 8 月 10 日，这时距离他去世已经不到两年，他在致费马的信中这样写道：

“顺便谈到数学，我觉得它是对思维的最高锻炼；但同时我又觉得它是那么无用，以致使我感到一个单纯的数学家同一个普通工匠的差别极小。我承认它是世界上最可爱的职业，然而仅仅是一种职业；我也常说，想学数学是件好事，但为此费力则不然。所以我不愿为数学多走两步。我想你也会有同感。”

当数学囿于贵族的沙龙之中，离开社会，离开生产实践，只是那些不必为生活奔波操心的有闲阶层酒后饭余的话题，就可能产生“有趣但是无用”的错误想法。这是帕斯卡的悲剧所在，也是数学史上的一大憾事。要是帕斯卡的健康足够好，而他的思想又不误入歧途，那么，这位才华出众的学者一定能为数学作出更伟大的贡献。

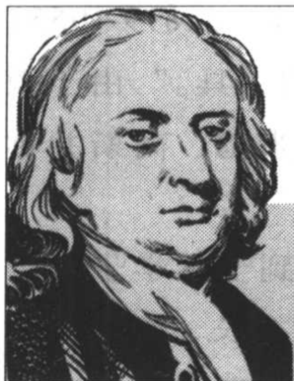
走向终点

怀着无限的期望，帕斯卡来到波特罗耶尔修心养性。可是，上帝并没有对他表现出怜悯之心。失眠和牙疼死缠着他不放。当时，谁牙疼就只好去找理发师——兼职的牙科医生。那里没有麻药和其他器械，只有一把吓人的钳子。疼痛使帕斯卡辗转反侧，不能入眠。上帝眼睁睁看着自己的信徒遭受可怕的折磨而爱莫能助。帕斯卡只好向数学求救：他躺在床上，咬紧牙关，强制自己全神贯注地思索各种数学问题。没想到疼痛竟不知不觉地消失了。他不知道这是注意力转移的结果。他认为这是神的显灵，告诉他在这种情况下研究数学不是罪过。于是他放心地研究下去。很快，作为向法国和英国数学家的挑战，一篇论摆线的重要论文，以阿莫斯·迪戈伐里的笔名发表了。接着他又研究了一种点的轨迹，称为帕斯卡蚶线，来纪念他已故的父亲。

为了回答异教徒对詹森派主要人物阿诺尔德的攻击，帕斯卡撰写了著名的《外省信札》，共含书信 18 篇。他的文学才能和宗教热

诚再一次得到充分表现。《外省信札》被推崇为法国散文的经典名著和神学辩论中的非凡杰作。

1658 年，帕斯卡病情恶化。他无时无刻不在难忍的痛苦中煎熬。现实生活的苦楚更激发他追求“在天国中永生”的热诚。1662 年 6 月，他把房子送给一家患天花的穷人，自己住到姐姐吉尔帕蒂家中。过了两个月，年仅 39 岁的帕斯卡在一阵惊厥以后再也没有复苏过来。逝世以后的检查发现，他的胃和其他重要器官都有致命的疾病，大脑也有严重损伤，但是尽管这样，他在数学上作出了伟大的贡献，在文学上蜚声遐迩。帕斯卡和他的同时代人笛卡儿、费马一样，成为法兰西民族的骄傲，受到进步人类深深的怀念和尊敬。



牛 顿

(1642—1727)

流数法是揭示几何秘密进而揭示自然秘密的万能钥匙。

——贝克莱①

只有把他看做是寻找永恒真理的斗士，才能理解他。

——爱因斯坦

自然科学家的偶像

14世纪开始的欧洲文艺复兴吹响了反抗封建神权的号角。15世纪后半叶，近代科学技术兴起。教会势力意识到科学思想的威胁，压制学术活动，迫害进步学者，就成为异端裁判所的圣职。但是，历史的洪流势不可挡。到17世纪末，科学终于战胜神权而牢牢站稳脚跟。伊萨克·牛顿就是这场科学进军的伟大旗手。

牛顿继承伽利略、笛卡儿等前人的业绩，以牛顿力学为中心，连同他在光学、天文学等方面的巨大发现和深刻见解，建立了经典物理体系，用它解释了从日月星辰到海洋潮汐各式各样的自然现象，指导着由蒸汽车船到织机钟表等种类繁多的生产工艺。科学技术广沐恩泽，封建迷信节节败退。要把牛顿思想当作异端邪说已经不可能了。

牛顿在建立经典物理体系过程中，启用了从古至今最重要的数

① 乔治·贝克莱（1685-1753）是英国主教，唯心主义哲学家。

学创造——微积分。正如20世纪大物理学家爱因斯坦（1879-1955）所说："只有这种方法才能为他提供表达他的思想的工具。"由于微积分和其他一系列重要的数学发现，使牛顿和阿基米德、高斯并称为历史上最伟大的数学家。

牛顿在世的时候就成为自然科学家的偶像，受到全球学子的崇拜。他是英国国会议员，皇家学会连任24年的终身会长，巴黎科学院尊贵的外籍院士，还曾任英国造币厂督办、总裁。安妮女王亲临剑桥，封他为爵士。牛顿身后荣获隆重的国葬，长眠于威斯敏斯特教堂的名人墓地。

牛顿的辉煌业绩和显赫声望，使许多人向往；甚至可能有人对牛顿的"荣华富贵"垂涎三尺。但是，牛顿的一生，决不是那些持有庸俗幸福观价值观的人们所真正向往的。首先，刚出生的小牛顿，是个早产而衰弱的遗腹子，这就不是他们心目中的幸运儿吧？

心灵手巧

1642年1月8日，近代科学伟大先驱伽利略在软禁中含冤去世。就在同一年，他的后继者牛顿出生了。这年圣诞节早晨，在英格兰东海岸的林肯郡格兰瑟姆镇以南的乌尔索普村，牛顿诞生在一个小农庄主的家庭。未足月就生下来的小牛顿不到1500克重，瘦小得几乎可以放进一只大玻璃杯。婴儿衰弱极了。出生以后好几个月，他的头还要用夹板支着。人们忧虑这孩子不能健康长大。

牛顿的祖辈中没有知名的学者。父亲伊萨克是个任性、奢侈而又意志薄弱的人。他在小牛顿出世前3个月病死了，才36岁。母亲汉娜·艾斯柯是个勤俭能干的女当家。丈夫早逝使她忧伤。为了纪念亡夫，她给孩子也取名伊萨克。在妈妈细心照料下，孩子终于活了下来。可是，小伊萨克刚两岁，汉娜在邻居们的劝说下，改嫁给相邻的北威桑教区的司密斯牧师，一个刻薄的单身汉。他不收留前夫的遗孤。妈妈只得把小伊萨克托付给外婆。根据法律，孩子从父

亲遗产中每年可以得到80英镑的生活费，维持祖孙两人的温饱。

小伊萨克记忆中最早的图像，是姥姥忙碌地为他做饭洗衣，舅舅背着一袋奇妙的工具来修理家具什物。小伊萨克最开心的是推着舅舅特意为他做的那辆小车满处跑。趁姥姥不在的时候，拿出舅舅袋子里的锄头斧子，东敲敲西打打，试着“用双手改造世界”，更使他享受到前所未有的快乐。

小牛顿6岁上学。他在斯克灵敦和斯托克两所小学学会读书写字和初等算术。12岁那年到格兰瑟姆镇上有名的“模范学校”学习。名字好听，其实那不过是一所只有一间大厅的旧式乡村中学。在格兰瑟姆，小牛顿借住在药剂师克拉克大叔家里。克拉克大婶是妈妈汉娜的好朋友。小牛顿斯文又勤快，课余常常帮大叔大婶干点零活，很快赢得克拉克一家人的欢心。克拉克大叔乐于教他手艺，向他传授各种知识。有一次大叔送他一本《自然和技艺的奥秘》。这本小书揭示了大自然和科学家们许多有趣的“内幕”，使牛顿大开眼界。他照书上介绍的方法制作烟火，调色绘画，从单纯的自我娱乐到富有探索意味的研制活动，大大刺激了他动手创造和探索自然的欲望。

牛顿不像高斯、维纳那样从小显露出引人注目的科学天才，也不像奥地利作曲家莫扎特小时候那样有令人惊叹的艺术禀赋。他的环境也没有为他在科学或艺术上的成长提供特别有利的条件。很长一段时期他学习成绩平庸，甚至因为成绩欠佳受过老师批评。但是，这没有掩盖小牛顿的心灵手巧。可能是受舅舅和克拉克大叔的影响吧，小牛顿对制造技艺有特殊的爱好。他能够准确地制作各种复杂的器械和玩具。他要做一名好工匠。他认为，那些“不能精确地工作的工匠算不上是真正的工匠”。最可贵的是，他不是简单的模仿。他的许多创造发明使人赞叹。为了使他制作的装置更臻完善，牛顿培养了不怕困难和不达到尽善尽美不罢手的顽强精神。

在英格兰滨海的乡村，白色的风车到处可见。小牛顿制作了各色各样的风车模型。精巧的小风车博得老师和同学的交口称赞。牛

顿并不满足，他又发明一种水车风车联动装置，使风车可以在无风的时候借助水力驱动。他制作的木钟、水钟和日晷等各种计时器，给大家留下深刻印象。木钟啮合的齿轮，需要一个个精雕细刻，虽然花的功夫不少，可惜还只是个不顶用的模型。牛顿在格兰瑟姆上学的时候做的水钟就不同了。他仔细测定容器水位变化速度，在外面画出精密的不等分刻度。他把4英尺高的水钟放在屋角，按时添水，真用来计时。后来他又用墙砖刻了个大日晷，是一个精度很高的时计，在日照良好的时候准确可用，乡亲们称它为“牛顿钟”。这种日晷不是小孩玩具了。牛顿的日晷，后来由英国皇家学会珍藏着。小牛顿做的玩具也与众不同。他做的风筝不但飞得高放得远，还在上面系了个灯笼。晚上，迷信鬼神的村民们看到点亮的灯笼在夜空中滑翔，吓了一跳，以为是什么“不祥之兆”呢。

振聋发聩

人们的夸奖，使小牛顿对手工制作的兴趣愈来愈高。有一天牛顿拿了一架水车模型到学校表演。这是他集中以前多种水车的优点，花了近一个月时间，才做出来的，不但设计精巧，做工也很考究。牛顿的小模型立刻吸引了一大群小观众。看到随着风车的转动，水车把水哗哗地往上抽，同学们不由大声地喝彩和鼓起掌来。牛顿自己也感到相当满意。不料旁边有个高个子的学生却露出不以为然的神情。他挑战似地问牛顿：

“你能说说水车抽水的道理吗？”

这下把牛顿问住了。是啊，自己只顾埋头制造，这里面的道理可是没有认真想过。牛顿支支吾吾地窘得满脸通红。这真是“振聋发聩”的一问。牛顿懂得了，不了解作用原理的工匠，也不是好工匠。他开始以特有的顽强钻研精神，向书本知识进攻。牛顿的学习成绩很快有了显著的进步。

另外一次刺激更增长了牛顿的进取精神。学校里有个出名的恃

强凌弱的“小霸天”。他见到身小力弱的同学总是恣意欺侮。谁要稍有违抗，轻则吃他的耳刮子，重则被打得鼻青脸肿。因此，除了几个“马屁精”以外，小同学看见他都躲得远远的，谁也惹不起他。这次，“小霸天”欺侮到牛顿的头上。他看到牛顿独自一人在低着头走路，居然对他没有一点卑躬屈节的表示，就猛地使了个绊子，把牛顿重重地摔了一跤。

“哼！连走路也不瞧瞧！”“小霸天”说着，还向牛顿吐了口唾沫！

这一回“小霸天”找错了对象。别看牛顿瘦弱可欺，一旦侮辱他的人格，他决不示弱。牛顿紧握拳头，不顾一切地冲向“小霸天”，勇猛得像头发怒的小狮子。欺软怕硬的“小霸天”最后狼狈败退。这场斗争的胜利，大大增强了牛顿对自己力量的信心。

在暴风雨中

牛顿上中学不久，继父病故。妈妈带着3个孩子回到乌尔索普。伊萨克同情母亲的不幸，每个星期天都回家带着弟妹们玩耍，为母亲分担家务。日子一久，汉娜感到一个人兼管农庄和家务实在太累，就委婉地向伊萨克表示，希望他退学回家，协助她管理农庄。牛顿想继续上学，可是他怎么忍心不理会妈妈的请求呢？

1657年3月底，牛顿辍学回家，每天跟着母亲干活。可是他的心思仍在书本和手工制作上。因此，干活的时候常常心不在焉，闹了不少笑话。

有一回，牛顿赶着马去格兰瑟姆送麦子。回来的路上碰到山坡，牛顿只好牵着马走。他带着完成任务的轻松心情，边走边想起学习的事来。上到坡顶，他打算骑马下山。可是回头一看，马不见了，虽然缰绳还捏在手里。他赶紧四下寻找。从格兰瑟姆一直找到家里，推门一看，马在那里津津有味地吃着草料呢！不知什么时候，马嚼子掉了，马独自跑回家来。因为专心读书，放羊让羊跑丢了的事也时有发生。看到牛顿精神恍惚的样子，妈妈很发愁，常常向舅舅诉

苦。舅舅听了哈哈大笑，认为小牛顿好学上进，反而劝汉娜让他继续上学。

1658年9月3日，英国资产阶级革命领袖克伦威尔将军的死，预兆着清教徒共和尝试的完结，也是牛顿生活道路上的一次转折。就在这一天，一场罕见的暴风雨横扫英格兰。村里许多房顶被掀翻了；房子被吹得咯吱咯吱直响。旷野里，一棵百年的老橡树被连根拔起；小树在暴风雨中剧烈地摇曳着。家家屋门紧闭；迷信的乡民不住地祈祷上帝保佑。牛顿却为大自然施展威力的神奇景象摄住了。他不禁想测量那飓风的力量。迎着怒号的狂风和倾盆的暴雨，牛顿冲了出去。他一会儿逆着风跑，一会儿顺着风跳，认准起落点，仔细量距离。家里人找到他的时候，只见他披着一头乱发，浑身上下早已经湿透。此情此景，使汉娜深感震惊，看到孩子研究学问痴狂到这种地步，她认识到，让他辍学务农是个严重错误。她决定送牛顿返回格兰瑟姆继续上学。

重返格兰瑟姆

秋天，阳光灿烂，田野一片金黄。克拉克老夫妇和他们的女儿卡德琳在门口欢迎牛顿归来。重返格兰瑟姆，牛顿不仅感到喜悦，甚至可以说怀有一种使命感。为了自己的学业，亲人作出牺牲，师长慷慨相助。因此，学习不只是解脱繁重的体力劳动和追求个人爱好，而且是对家庭、师长以至信仰上一种带有神圣色彩的责任了。他决心努力学习。在格兰瑟姆他学习了许多功课：拉丁语、希腊语、希伯来语、逻辑、历史，圣经，还有他向来感兴趣的自然科学，包括数学和天文学。在克拉克大叔制药工作的影响下，牛顿对化学实验也发生浓厚的兴趣。他经常摆弄试管烧杯，观察化学反应。可能是由于化学实验神秘的魅力，牛顿在以后30年的科学生涯中，一直没有间断过化学实验。在休息的时候，牛顿还写诗作画，甚至把自己的作品镶在自制的镜框里，挂在墙上欣赏。他绘制工件图样，也

画花卉动物，有时候用木炭，有时候用自己调制的颜料。和许多孩子一样，伊萨克热爱生活，喜欢大自然。

随着牛顿日渐长大，克拉克大婶和前夫的女儿卡德琳·斯托瑞小姐也亭亭玉立了。虽然父母亲对卡德琳说过，在牛顿用功的时候不要去打扰，她还是经常悄悄地上楼来给牛顿送点心茶水，或者向牛顿请教功课。本来，牛顿和卡德琳青梅竹马，两小无猜。现在，似乎有了微妙的变化。卡德琳的到来，使小房间的一切都增添了光彩。短暂的停留中，她温存的话语，安详的举止，伊萨克久久不能忘怀。他总是尽其所能详尽地解答卡德琳的问题。后来，他还用精湛的手艺，抽空为卡德琳做茶几小柜什么的，把自己朦胧的感情倾注在这些小木器上。但是，在那封建宗教影响深重的社会，一个前途茫茫的穷学生，对爱情能抱什么奢望呢？特别是牛顿对学习的着迷和抱负，使他和卡德琳的友情没有进一步发展。他立志走追求真理献身科学的道路。他知道，自己将来要想上英国最高学府剑桥大学，并且在那里立足，难免要接受神职，过独身生活。既然这样，就应当克制自己，免得将来给对方增添麻烦。牛顿认识到，自己选择的道路少不了痛苦磨难并且布满荆棘，但是其中自有美好的甘泉。牛顿忖量自己的抉择，瞻望未来，写下了一首诗，题名《三顶冠冕》：

世俗的冠冕啊，
　　我鄙视它如同脚下的尘土，
它是沉重的，
　　最好的结局也不过是一场空；
而现在我愉快地迎接
　　一顶荆棘的冠冕，
尽管刺得人疼痛，
　　内心却觉得甜美；
我更看见那光荣的桂冠，
　　在我面前呈现，
它充满幸福，

永恒无边。

进大学以后，牛顿和卡德琳分处两地，很少见面。牛顿大学毕业前不久，斯托瑞小姐终于出嫁而成为文森特夫人。虽然探索自然的快慰使牛顿有力量排遣内心的惆怅，但是他不再追求异性而终身未娶。牛顿对卡德琳始终怀有深厚的感情。卡德琳婚后心境不好的时候，牛顿常常安慰她，给予鼓励和帮助。他们这种感人的友谊，一直保持到晚年。

剑桥的减费生

有了崇高的目标，严格要求自己，牛顿学习进步很快。高中毕业的时候，他已成为全校闻名的高材生。

1661 年 6 月，虽然在欧几里得几何答卷中有缺陷，牛顿还是通过了剑桥大学严格的入学考试，进入这所著名大学中最大的三一学院。格兰瑟姆中学的斯托克斯校长十分了解牛顿。他明白，他们这所城镇中学向剑桥输送了一名前途无量的学生。在送别牛顿的校会上，老校长眼中闪着激动的泪花，称赞牛顿的品行和才华，号召学生们学习牛顿勤奋好学的精神。

牛顿怀着虔诚的心情来到全国闻名的剑桥大学。那雕刻着国王亨利八世像的拱形大门和遐迩闻名的纳维图书馆，那凝重古朴的红色和灰色的建筑和在它旁边静静流淌着的蜿蜒的剑河，那浓密树荫下幽深的石径，整个校园庄严肃穆的气氛有一种无形的力量，深深感动着这位年轻的崇拜者。不过，当时的剑桥，虽说名气很大，还说不上是理想中的科学圣地。尽管 17 世纪资产阶级革命的浪潮不能不波及到这所有 400 多年历史的最高学府，剑桥大学仍被宗教势力牢牢把持着。办学是为了维护封建统治而培养牧师。教学内容主要是圣经教义和古典语言，文史科目。教员大多数是神职人员；有神论禁锢着师生们的思想。不过，比起别的学院，三一学院毕竟要好些。它的图书资料丰富，教授的水平也比较高，许多新知识新思想

常常从这里传播开来。

由于家庭经济比较困难，牛顿以“减费生”身份入学。减费生为了减免费用，需要在校内做一些服务性杂役，包括准备晚餐和侍候那些富家子弟。这些杂役，使牛顿体验到贫富贵贱的差别。他不再接受同室阔少下酒馆的邀请，也不想和他们玩纸牌赌钱；他已有两次输钱的记录。不久牛顿搬到一间小屋，和另一个沉静好学的减费生威肯斯住在一起。

开始一段时期，牛顿似乎没有突出的表现。数学主要靠自己研究。头两年除了算术、代数外他还认真学习了欧几里得的《几何原本》，领略到它的优美和严密；后来他精读笛卡儿的《几何学》，认识到代数的重要作用，掌握了坐标法。在学习中，牛顿解答了大量习题。对于各式各样的数学问题，有的学生怕难，有的学生嫌繁，有的学生觉得枯燥无味。牛顿却认真演算，深入思考，颇有心得，觉得其乐无穷。这些基本数学训练极大地锻炼了牛顿分析思考的能力，为以后科学研究打下坚实的基础。

虽然封建势力顽固地抵制变革，欧洲毕竟逐渐进入资本主义时期。随着生产发展和技术进步，科学也兴旺起来。哥白尼、伽利略、开普勒、笛卡儿的科学思想得到传播和发展；各国新兴的科学力量陆续建立起学会一类的科学组织，交流科学思想，推动技术进步。早在1645年，格雷沙姆学院以英国数学家约翰·沃利斯（1616-1703）等人为中心的一批自然科学家定期聚会，创立了“哲学院”，开始了学会的活动。1660年它有了正式的章程。1662年查理二世复位，把“哲学院”命名为“利用和增进自然知识皇家学会”。实际上它只是个得到工商界支持的民间团体。虽然比罗马的林嗣（意为“山猫”）科学院晚了61年，但它对英国的科学发展所起作用还是及时而且重要的。第二年在剑桥也发生了一件有意义的事情。亨利·卢卡斯教授在6月22日病故以前立下遗嘱，决定用他的遗产在三一学院设立一个自然科学讲座，向青年学生传授自然科学和数学知识。这就是后来有名的卢卡斯数学讲座。它的第一任教授伊萨克·

巴罗（1630-1677），是一位有真才实学的英国数学家和物理学家。他不但在文学、哲学、神学和自然科学等方面有渊博的知识，而且对数学和光学有许多独特的贡献，享有“欧洲最优秀学者”的美名。真所谓“英雄识豪杰”，巴罗很快发现：牛顿不但基础扎实，而且思维敏捷，数学和自然科学上最新成就，一经介绍，他很快就能领悟。巴罗引导牛顿陆续学习从哥白尼一直到巴罗本人的大量著作。站到这些巨人的肩上，大大开拓了牛顿的视野。先哲们艰苦卓绝的工作，使他感奋不已。他渴望着自己也能置身于这个伟大的行列，为揭开大自然之谜作出贡献。他一面深入钻研书本，一面坚持观察天象和进行心爱的物理实验。他从惠更斯的《光学》中得知荷兰物理学家、数学家斯涅耳发现光的反射定律，就做实验来验证它。三一学院有条长廊回声很响，牛顿就利用它来测定声波在空气中的传播速度。坚持不懈地观察彗星和月晕，好几次把他累倒。他钻研书本，不迷信书本，一切结论经过严格的检验。牛顿找到了自己的出发点。听讲，阅读，观察，实验，不停地思索，使牛顿的学业突飞猛进。

1664年，牛顿因为成绩优秀，被评为“优待生”，由学校支付学费，他不必再去做服务性的劳动，时间精力更集中于学习。就在这一年，经过考试，牛顿被选为巴罗的助手。牛顿已经为更艰难的攀登作好充分的准备。

有一次，牛顿受到巴罗关于无穷级数求和演讲的启发，运用无穷级数来计算曲线长度和曲边图形的面积，为积分学的建立迈出有意义的一步。1665年，牛顿在二项式幂的展开上有了突破。以前的帕斯卡三角或者说杨辉三角①，都是利用 $(1+x)^{n-1}$ 展开式的系数

① 杨辉（约13世纪）是南宋数学家，钱塘（今浙江杭州）人，著有《详解九章算法》12卷、《日用算法》2卷、《乘除通变算宝》3卷、《田亩比类乘除捷法》2卷、《续古摘奇算法》2卷。在杨辉的《详解九章算法》中提到“开方作法本源”图，就是西方所谓“帕斯卡三角”。以后发现在杨辉之前北宋数学家贾宪（约11世纪）已经在他的著作中提出“开方作法本源”图，比帕斯卡早600年。

来确定 $(1+x)^n$ 展开式的系数。从图中的三角形可以看出，由 $(1+x)^2$ 展开式的各项系数 1、2、1 很容易得到 $(1+x)^3$ 展开式的各项系数 1、3、3、1，并且依次往下推。

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

……………………………………………

现在，牛顿得到了不依赖于 $(1+x)^{n-1}$ 来展开 $(1+x)^n$ 的方法：

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots$$

更进一步，牛顿还确定对分数指数和负数指数，展开式导致无穷级数。这就是著名的牛顿二项式定理。

牛顿当时还是一名在校的学生。

划时代的发现

1665 年，牛顿大学毕业。4 年的潜心学习和研究，使牛顿有了坚实的基础。他决定留在剑桥，为揭开自然之谜而继续探索。但是，天时不好，鼠疫在英格兰流行起来。黑死病使成千上万的人染病死去。在死亡的威胁下，剑桥被迫暂时关闭。牛顿只得返回故乡躲避瘟疫。但是已经没有任何外界力量可以阻止牛顿在科学上的攀登。从 1665 年夏天到 1667 年春天，在僻静的乌尔索普，牛顿以坚持不懈的艰苦研究，初步创立了“流数法”，也就是微积分；分解了白光；发现了万有引力。这些划时代的伟大发现使他成为彪炳千古的科学巨人。可以这样说，“科学史上没有别的成功的例子可以和牛

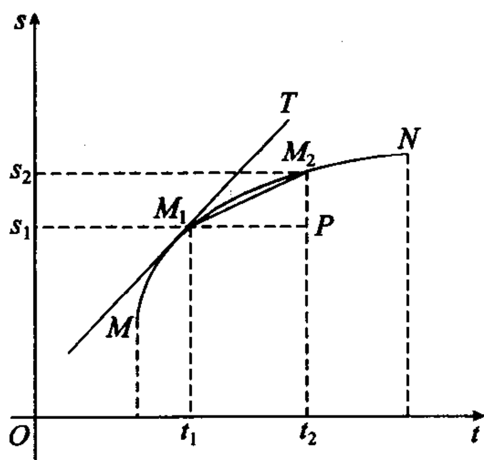
顿这两年黄金岁月相比。”

人类在长期生产活动和科学研究中，提出了大量数学问题。其中求曲线的切线和求曲线围成图形的面积是两大类问题，对它们不断的研究最终导致微积分的诞生。早在2000多年前，古希腊阿基米德曾经解决过求螺线的切线和抛物线弓形面积等难题。但是，由于没有掌握微积分的普遍方法，这些解答是他绞尽脑汁好不容易才获得的。很难想像，对每一条曲线都像阿基米德那样去寻找巧妙的特殊解法。这不但极为复杂，而且几乎是不可能的。由于生产水平的限制，当时的数学家还不可能意识到这类问题的极端重要性。因此，对它们的研究时断时续，没有真正的突破。一直到16世纪，形势才有了转机。随着生产和航运事业的发展，曲线的切线问题的重要性日益显示出来。别的不说，在一望无际的大海上，要确定船只的位置和航线，离不开天文学的知识和观测手段，而要设计天文望远镜光线的通路，根据光的折射规律，必须了解曲线的切线。后来人们又认识到，由割线求切线，相当于物理学上由平均速度求瞬时速度，这无疑是一个具有普遍意义的问题。因此切线问题的研究吸引了几乎一切数学家的兴趣。怪不得笛卡儿说，求切线“不但是我所知道最有用最一般的问题，而且甚至可以说，是我惟一想要在几何学里知道的问题”。笛卡儿利用坐标法，通过代数演绎，求得一些高次抛物线的切线。费马和巴罗求得了更一般曲线的切线。费马还得到求函数最大值和最小值的相当普遍的方法，它的实质与求切线方法相同。

求积问题，包括曲线长度的计算，看来困难得多。早先开普勒和伽利略曾经研究过。费马和帕斯卡求得了前几个自然数的 m 次幂的和，这样，高次抛物线弓形面积就好算了。不过，对于抛物线以外的曲线，求积还是很困难。

牛顿从前人成果中吸取丰富的数学营养。在代数和微积分方面，对牛顿影响最大的是约翰·沃利斯。沃利斯最初在剑桥研究神学，20岁左右开始研究数学，后来成为牛津大学的几何学教授。他参与

筹建皇家学会，是 17 世纪英国仅次于牛顿的数学家。沃利斯在其名著《无限的算术》中不同于许多数学家的几何论证，成功地应用坐标几何于求积问题。



这些日子，牛顿一直在楼上的小房间里专心研究沃利斯等人的著作。夏天已经过去。北海吹来的秋风使气温骤然下降，然而牛顿研究的热情却不断高涨。到了 11 月，牛顿终于有所发现。我们用图形来说明牛顿的思想。曲线 MM_1M_2N 表示质点和某定点的距离 s 随着时间 t 变化的规律。当质点由 M_1 到达 M_2，它所经历的时间为

$$t_2 - t_1 = M_1P = \Delta t,$$

距离为

$$s_2 - s_1 = PM_2 = \Delta s。$$

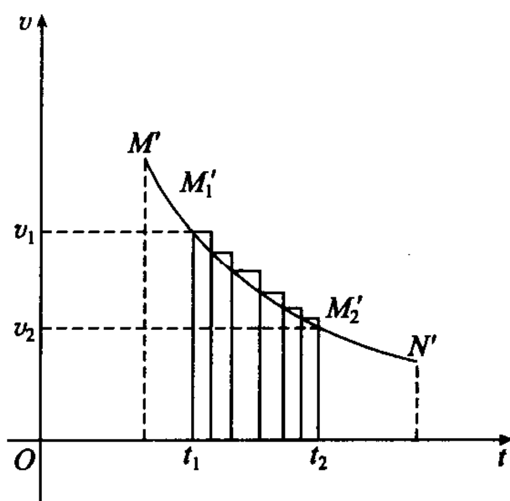
很明显$\frac{\Delta s}{\Delta t}$就是质点在时间间隔 Δt 内的平均速度；它刚好等于 tan $\angle M_2M_1P$，也就是割线 M_1M_2 的斜率。不难看出，当 Δt 愈小，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$就愈接近于质点在 t_1 时刻的速度；同样，割线 M_1M_2 的斜率也愈接近于曲线在 M_1 处的切线 M_1T 的斜率。经过长时间的思考，牛顿断定，当 Δt "无限小"，那 "最后的比" $\frac{\Delta s}{\Delta t}$就无限精确地表示质点在时刻 t_1 的速度，它也就是曲线在 M_1 处的切线 M_1T 的斜率。这就是微积分中导数的概念。因为它是由 M_2 无限地 "流" 近 M_1 得到的，牛顿称他的方法为 "流数法"。

相比之下，求积问题困难很多。比如说，要求 $M_1t_1t_2M_2$ 的面积，除了像阿基米德所使用的穷竭法那样，把它分割成一小块一小块矩形叠加起来计算以外，似乎没有更好的办法。而这种方法，对

一般的曲线来说，使用起来实在太复杂了。

漫长的冬天过去了，研究毫无进展。窗外不时送来的鸟语花香，报告春天已经返回大地。眺望远方的田野，眼前是一片斑斓的春色。牛顿的精神为之一振。他从大自然的蓬勃生气中似乎得到某种启示：冰天雪地的严酷环境，终究扼杀不了顽强的生机。

牛顿决定另辟蹊径。他还是习惯于从物理意义上来思考问题。因为在他看来，数学归根结底是描述自然、认识世界的手段。利用流数法，他已经得到距离 s 对时间 t 的导数——速度 v，因此，左图的速度 v 随时间 t 变化的规律就可以画出来了。如果按以前的方法来计算面积 $M_1't_1t_2M_2'$，那就要把 t_2-t_1 分成更小的间隔，把面积近似地分割为一小块一小块的矩形叠加起来。间隔分得愈小，就愈能精确地表示 $M_1't_1t_2M_2'$的面积。那么，从物理学上说，这块面积表示什么呢？经过反复的思索，牛顿终于取得决定性的突破。牛顿惊喜地发现，其中的每一小块矩形不正代表着这段时间间隔内把速度近似地看做匀速时所经过的距离吗？而把这些矩形叠加起来，不是别的，就是上图的距离差 s_2-s_1。换句话说，距离对时间的导数是速度；反过来，速度曲线下面的面积，不必“笨拙”地叠加一块块矩形，而只要反过去求距离的差。牛顿把微积分中这种积分方法称为“反流数法”。



多少著名数学家长期在求导数和求积分两种运算之间徘徊，毫无所获。现在，牛顿以他超人的洞察力发现，这两种运算是互逆的。也就是说，如果函数 $s(t)$ 的导数是 $v(t)$，那么导数 $v(t)$ 在区间〔t_1、t_2〕上的积分等于函数 $s(t)$ 在端点的值差 $s(t_2)-s(t_1)$。这就是微积

分的基本定理，后人也称为牛顿-莱布尼兹公式。这样，由求导数的微分法则已经知道，函数$\frac{1}{2}gt^2$的导数是gt，那么知道自由落体的速度$v=gt$，就可以推出伽利略的自由落体定律：$s=\frac{1}{2}gt^2$。又如，因为函数$-\cos x$的导数是$\sin x$，正弦曲线$y=\sin x$在区间$[0,\pi]$上与x轴所夹面积应等于$-\cos(\pi)-[-\cos(0)]=1+1=2$。于是过去数学家煞费苦心解出的许多难题，掌握牛顿-莱布尼兹公式的人可以轻而易举地算出来了。这种令人神往的情景，使外行人惊愕不已，而内行人更是拍案叫绝。

牛顿-莱布尼兹公式揭示了导数和积分的本质联系。这种深刻的规律，在运动学这个特定的问题中比较清楚地显现出来。牛顿发现了它，后来进一步确认了它的普遍性。这就无可争辩地确立了牛顿在数学史上不朽的地位。

由于微积分的创立，以及在这个基础上建立起数学中最庞大的分支——数学分析，人类就能定量地研究各种变化和运动，这就决定了近代科学技术的精确性这个本质特征。可以毫不夸张地说，没有微积分的建立和发展，18世纪以来的科学发展和技术进步都是不可能的。

当然，年轻的牛顿不是在故乡一下子把微积分都搞清楚了。它的理论基础和不少细节还有待澄清。其实，此时此刻牛顿对自己流数法和反流数法的意义还认识不足。因此，他没有立即全力以赴地来发展和完善自己的理论。他暂时满足于利用它来为自己揭开引力之谜服务。

神圣时刻

1666年1月的一天。弥撒刚刚结束，教堂的钟声还在村子上空回荡。汉娜一家随着乡亲们有说有笑地往家走。一转眼，伊萨克已经没有踪影了。这些日子，牛顿整天把自己关在房间里，连门窗都

封得严严实实的。谁也猜不透他在里面研究些什么。别的倒挺好，就是每天吃饭，非得小妹妹安娜嚷着催着好一阵，他才肯下来。

这一天使全家人大大感到意外。妈妈刚放好盆子和刀叉，还没等安娜喊叫，伊萨克已经快步走下楼来，眼里闪耀着兴奋的光芒。不过，他不是急着来吃午饭。他高兴地邀请大家到他的房间里去看一件新鲜玩意儿。平常伊萨克不喜欢别人进他的房间，特别是在他学习和研究的时候。要说主动邀请，那更是从来没有过的。所以，一听到邀请，好奇的弟妹们不用说，就连妈妈也赶紧在围裙上擦了擦手，跟着上楼来。

一进房间，伊萨克随手关上房门，遮得密不透风的房间里顿时一片漆黑。没有等弟妹们嚷嚷起来，牛顿让他们看墙上的一个光点。果然，从一个小窗孔透进一线光，在墙上照出一个圆圆的白色光点。大家凑近瞧了又瞧，不禁大失所望。这不过是个平常的光点，没有任何奇特的地方。这时候牛顿不慌不忙地从桌上拿起一块三棱柱形的玻璃把光线一挡，刹那间出现了奇迹。光点不见了，在它的旁边突然映出一条鲜艳瑰丽的彩带！真是妙不可言！仔细看看，这彩带同雨后晴空中出现的彩虹一模一样，由红、橙、黄、绿、青、蓝、紫七种颜色组成。面对这样壮丽的景象，大家都屏住呼吸，一时惊讶得不知说什么才好。

对这个被法国数学家拉格朗日称为最足以显示“人类理想的崇高伟大”的神圣时刻，牛顿回忆说：“1666 年初，我做了个三棱镜，用它研究颜色现象。为此，我把房间弄黑，在窗上开个小孔，以透进所需要的阳光。把棱镜放到光线入口处，使光折射到对面的墙上。当我回头看到由此产生的鲜艳的彩色光线时，感到极大的愉快。”

后来，牛顿又用第二个棱镜把七种单色光合成白光。

牛顿的白光分解实验，宣告光学的一个重要分支——光谱学①

① 复色光经过棱镜、光栅等分为单色光，这些单色光按波长大小依次排列成的图谱称为光谱。研究光谱的产生、性质以及利用光谱进一步认识物质的组成和特性的光学分支，称为光谱学。

的诞生，对认识物质内部结构和运动性质有重要意义。不过牛顿没有陶醉在成功的欢乐里。他期待着回到剑桥，进行更精确的实验，深入了解折射现象，探索光的本性。同时，还有一个更为引人入胜的引力之谜在他的脑海中盘旋呢！

引力之谜的思考

1666年秋天的一个傍晚，工作了一天的牛顿下楼憩息。院子里香气扑鼻。西斜的阳光把树上熟透了的苹果映得通红，使人垂涎欲滴。牛顿信步来到苹果树下，观赏满园的秋色。满天的晚霞，光彩夺目，瞬息万变。被沉甸甸的果实压弯了的枝头在微风中摇曳。石缝里的蟋蟀在欢畅地演奏那秋色奏鸣曲。一切是那么静谧，那么令人心醉。大自然是多么和谐美妙。长期以来，牛顿总隐隐约约地感到，在神秘的自然界后面，一定有某种规律在支配着它的运动。可是这个规律是什么呢？苹果阵阵的幽香，不知不觉又使牛顿沉浸于引力之谜的思考之中。开普勒利用老师第谷的观测结果，发现了行星绕日运动的规律，也就是开普勒三定律。可惜，他没有能够正确揭示引力作用的规律。牛顿仔细研读开普勒著作，几个月以来，一直在艰苦地寻找着它的谜底。

“噗！”一只熟透了的苹果落在牛顿的面前，把他从遐想中唤醒。

啊，一只通红熟透的苹果。牛顿弯腰把它捡起来，细细端详着。苹果从右手转到左手，又从左手换到右手。牛顿似乎要从那熟透了的苹果去找出这种神秘的谜底。突然，他的手停住了。目光闪闪发亮。苹果为什么往地上掉，不朝天上飞？朝天上抛的石子为什么最后还要落下来？这不是地球在吸引它吗？对，地球在吸引！手里的苹果沉甸甸的，这不就是地球吸引它的力量吗？开普勒猜测行星绕日运动，是因为太阳吸引它们。看起来，这种引力不但太阳存在，地球同样存在。地球周围的物体，不正是因为受到地球的吸引，都

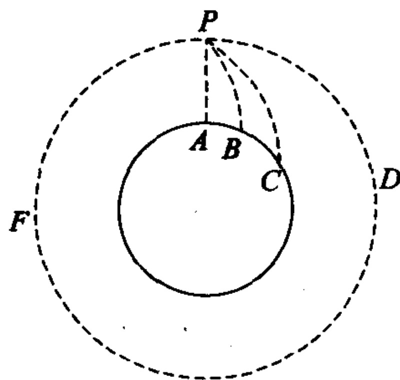
落向地面吗?

牛顿抬起头来，立刻否定了刚才的念头。一轮弯弯的明月挂在天边。它似乎在调皮地向牛顿微笑：

“瞧，我偏不掉下来!”

是啊，为什么苹果落下来，而月亮却一直绕着地球转呢？牛顿深深地陷入了沉思，对这个问题，日夜思考着。

几天以后，牛顿终于克服了月球的挑战，得到引力作用下物体运动的图像，把它画在自己的笔记本上。图形表明，由于物体水平方向的运动速度不同，受地球引力作用的物体会有不同的运动轨迹。自由落体的轨迹是直线；一个平抛物体的轨迹是抛物线，当水平速度达到一定大小的时候，惯性离心力和地球引力平衡，就产生绕地球的圆周运动。月球就是这样在运动着的。这个普遍存在的引力，决定了重物的坠落，也支配着宇宙间天体的运动。



牛顿发现，开普勒的引力同距离成反比的猜测不对，因为它和开普勒自己发现的定律相矛盾。他仔细分析开普勒第三定律，即行星绕日运动周期 T 的平方同它轨道半径 R 的立方成正比，对各个行星比值 T^2/R^3 都相等，牛顿断定，引力应同两物体间的距离平方成反比，即有所谓引力的平方反比定律。后来牛顿进一步认识到，引力同两个物体质量的乘积成正比。综合这些结果，就得到支配着宇宙间万物运行的万有引力定律。

但是，这还仅仅是牛顿的认识，正确与否还有待于实践的检验。最好的检验办法，当然是根据这种关系计算出行星运行的轨道，看看它和观测的结果是不是一致。可是，这谈何容易。别的不说，牛

顿的万有引力定律，指的是两个质点间的引力，而月球、地球和太阳等都是硕大无朋的球体。因此，比如要计算地球和月球之间的引力，就得把构成地球和月球的无数对质点之间的引力统统考虑在内。这个问题，对于今天已经掌握微积分知识的人，可能不算是什么特别的困难。可是，在 17 世纪，即使是对牛顿这样的大科学家，也是个难以想像的大难题。从这里我们不难看出，从微积分创立以来，为了使它成为每个大、中学生都能轻松自如地使用的工具，历代的数学家付出了多少心血。当然，牛顿也想到过，可以假定均匀球体的质量全部集中于中心构成的质点，等效于球体的作用。但是，对治学严谨的牛顿来说，不经论证和检验，不能作为论据而肯定。牛顿严格遵循他自己的格言："我不臆造假设。"

在紧张的思考探索中，时间过得很快。1667 年 3 月的一天，牛顿推开窗户，春雨霏霏，田野一片翠绿。虽然还带有一丝凉意，扑面而来的春天气息使牛顿有说不出的畅快。巴罗老师来信说，去年 9 月的那场大火，把伦敦夷为平地，却也遏止了瘟疫的蔓延。牛顿决定立即返回剑桥。他把还没有完成的一大堆计算和草稿塞进箱子，匆匆地上路了。

卢卡斯讲座的青年教授

牛顿回到剑桥，先去看望巴罗老师。不过，他没有提及自己在故乡的研究心得。他觉得现在谈论这些结果还为时过早。他要抓紧时间完成在乌尔索普所开始的研究。白光实实在在分解成彩虹，可是，制造反射望远镜、消除色差的构想还没有实现。他忙着继续自己的光学研究。

1667 年 10 月，学院授予牛顿"选修课研究员"职衔，也就是有奖学金的研究生。第二年，牛顿成为"主修课研究员"，确立了教师的地位。学院没有实验室，牛顿把自己菲薄收入的大部分购买工具和玻璃材料，在教室附近租了一间小屋，建立起自己的实验室。



卢卡斯讲座的青年教授

为了克服望远镜凸镜色差造成的天文观测上的障碍，他一面设计反射望远镜，一面研磨凹面透镜。无论是酷暑严寒，还是硕士论文的

答辩，都不能冲淡他研制的热情。到1668年冬天，世界第一架反射望远镜终于制成。当牛顿举起这架直径只有1英寸、长约6英寸的小望远镜向夜空望去，竟清晰地见到木星和它的4颗小卫星，心中不禁一阵狂喜。啊，万有引力！这再次证实了万有引力是宇宙间普遍存在的作用。反射望远镜的功效也使牛顿非常高兴。虽然材料不大好，磨得也不算光滑，它的效果居然超过三四英尺长的折射望远镜。可见，合理的设计思想是多么重要。后来，牛顿又用它观察到金星盈亏的变化，并且作了详细记录。

牛顿的研究光学的同时，没有忘记推进自己的“流数法”。作为毕达哥拉斯主义者，牛顿和伽利略一样，深信大自然有和谐的数学结构；自然规律只有用数学来表达才算达到完美的程度。1669年夏天，牛顿完成他关于微积分的第一部重要著作：《运用无限多项方程的分析学》。牛顿明确指出，曲线 $Y(x)=nax^{n-1}$ 由 $Z(x)=ax^n$ 确定，并且证明了函数 $Z(x)$ 的导数就是 $Y(x)$。牛顿利用这个结果，计算了双曲线一段弧和横坐标轴所夹曲边图形的面积，一直算到第52位小数。这表明牛顿确实掌握了求导和积分的方法，并且发现了微积分基本定理。积分在这里是求面积，是由求导的相反过程得到的。

牛顿把《分析学》的稿子呈送巴罗老师审阅。从牛顿返回剑桥以后，巴罗已经感觉到，这个年轻人一定在进行某种意义重大的探索。看到牛顿用代数方法一举揭开了先辈们多少年来孜孜以求的谜底，巴罗欣喜之余，不禁感到由衷钦佩。他一再表明，自己“对数学虽略有成就，但是和牛顿相比，就只能算个小孩。”

巴罗把《分析学》稿子转呈英国皇家学会秘书、数学顾问柯林斯备案。柯林斯把复制本散发给会员们评阅。

看到牛顿的才智远远超过自己，巴罗毅然辞去卢卡斯数学讲座教授职位，荐举牛顿继任。要知道，当时巴罗并不是年迈力衰的老朽，而正是年富力强、创造力旺盛的壮年；相比之下，在某些人眼中，牛顿倒还是“羽毛未丰”的青年。这年巴罗39岁，牛顿27岁。

1670 年，牛顿正式开课。他结合自己的研究先讲光学，后来教数学和力学。由于牛顿的研究远远超出一般学生的水平，而他又不擅言词，因此，真正能听懂他讲课的为数寥寥。看到学生人数逐次减少，牛顿深感不安。他精心地制作一张大海报，想吸引更多的听众，可惜作用有限。不过，对怎样教好学生、培养科学事业的继承人这些问题，牛顿确实认真思考过。他不但就这个问题写过文章，编写过从算术四则应用到代数和分析的大量习题，而且还写过一本有名的代数教科书《一般算术》。不过，这决不是一本普通的教科书，它包含牛顿一系列创造性的成果。比如高次方程根和系数的关系，方程的根和判别式的关系，特别是求高次方程根的近似值的迭代法，在 20 世纪后半叶发展起来的计算机中还一直采用着。

1671 年，牛顿关于微积分的另一篇重要著作《流数法与无穷级数》完成了。牛顿在这里解决了隐函数微分法、求函数的极值以及求曲线的切线、弧长、曲率和曲线围成的图形的面积等大量问题。牛顿把数学分析的过程和自然变化相联系，实际上处理了一些微分方程，也就是含有未知函数的导数的等式，求解这些方程，就是解出未知函数，也就是要寻求的自然规律。在这本书末尾，牛顿还附了一张简单的积分表。

这样，牛顿基本上完成了他创建微积分的宏伟工作。可惜，由于当时出版事业的落后，特别是对牛顿研究成果的伟大意义认识不足，两年以前完成的《分析学》和这篇《流数法》分别推迟了 40 年和 60 年才发表。这不仅给当时数学发展带来重大损失，而且发生了数学史上后果严重的微积分发明权之争。因为在 1676 年，德国的莱布尼兹也独立地发现了微积分基本定理，并且在 1684 年发表了他的成果。虽说莱布尼兹的发现算起来比牛顿晚了 10 年，他的著作却比牛顿早 30 年公诸于世。由于事关重大，几乎整个欧洲都卷入了这场旷日持久的发明权之争。争论后来甚至发展到这样的地步，它实际上已经远远超出牛顿和莱布尼兹个人的范围，而成为英国和欧洲大陆的荣誉之争了。

踟蹰迷津

由于航海事业和天文学知识是这样紧紧地联系在一起，而茫茫苍穹中充满神秘色彩的图景日夜展示在人们的眼前，因此，计算出太阳系中每个星球的轨道，准确预言各种天文现象的发生时间，就成为牛顿时代科学家梦寐以求的最高理想。这样，我们也就可以理解，为什么牛顿这样念念不忘他的光学和望远镜。要知道，对牛顿来说，微积分的创造和发明正是为无比宏伟的天体力学大厦铺设坚实的基础。

牛顿嫌1668年制造的第一架反射望远镜太小太粗糙，决定改进设计，制作一架更好的望远镜。牛顿的第二架反射望远镜大有进步。剑桥的同事纷纷前来观察，赞不绝口。消息传到伦敦，皇家学会写信请牛顿送件样品去鉴定。牛顿欣然应允。一架口径2英寸、焦距9英寸的反射望远镜样品于1671年送到伦敦，受到皇家学会会员的普遍赞赏。这架望远镜至今仍珍藏在皇家学会图书馆里。过了不久，牛顿又制造了一架大两三倍的望远镜送给伦敦市。这下轰动了全城。国王和大臣都慕名前来参观，用它窥视天象。牛顿的发明饮誉朝野。第二年（1672年）1月11日他被选为皇家学会会员。这是学者的最高荣誉地位。牛顿接到学会的通知感到高兴。他在复信中说，他认为自己将发表的论文《光与颜色的新理论》更有意义。2月6日，他把这篇论文呈交学会秘书奥登堡。这篇文章说明了白光的分解和折射望远镜色差发生的原因。在光学历史上，这无疑是一篇具有重要意义的论文。当然，它并不是完美无缺的。有些内容，比如关于光的本质的理论，实际上还处于襁褓时期，有待商榷。因此，对于牛顿的文章，赞成的人固然不少，持反对意见的也不乏其人。本来，科学家之间不同学术观点的探讨是正常的，也是必要的。然而，不能指望科学家都是富于理智、涵养很好、品学兼优的圣贤，他们之中除了脾气古怪者外，心胸狭窄乃至品行低下的人也是有的。这样，

在学术争论中，虚荣心和名利欲，这些人类可悲的弱点，在科学家身上发作，就会表现出意气用事，作风骄横等等，使学术观点之争变得复杂起来。皇家学会委托一个三人委员会来审阅牛顿的论文；胡克是其中之一。胡克是英国卓越的科学家。他发现固体弹性应变和应力成正比的胡克定律，还制成显微镜观察到植物细胞，提出细胞概念；他也认识到万有引力的存在，并且在物理和天文实验中有许多发明创造。但是，他在处理和牛顿的关系上有失公正。他利用审稿的机会，对牛顿的微粒说大加贬抑，对自己的波动说大肆宣扬。牛顿一开始还能够冷静对待。可是，当比利时东部城市列日的数学家勒克斯和物理学家林纳斯加入胡克的行列一起来反对他的时候，牛顿沉不住气了。他不能容忍别人对他的理论横加指责。最后，双方失去冷静，互相攻击起来。牛顿为争论深感痛苦和烦恼。他在致友人信中诉说自己的苦恼：

“我知道自己已经成了哲学（指自然科学，特别是物理学—引者注）的奴隶。但是，如果我能从勒克斯先生的纠葛中摆脱出来，我将断然地与它永别，除非只是为了个人的满足或者留着它在身后出版；因为我知道，一个人必须决定，要么什么新的成果也不发表，要么成为捍卫它的奴隶。”

不幸得很，100多年以后，高斯在非欧几何问题上也持有类似的见解。牛顿决定不再发表自己的作品。他1675年写的《颜色与光线的性质》和第二年写的《曲边图形面积》都被压在抽屉里，拒不发表。

接踵而来的批评，使牛顿烦躁；他所热衷的炼金术毫无进展，更加重他的沮丧。牛顿把怒气一古脑儿发泄到“哲学”身上。他甚至发脾气向奥登堡提出辞去皇家学会会员的请求。理由是经济困难和从剑桥到伦敦的路途太远。奥登堡信以为真，就劝慰他，根据规定，他可以免缴会费，这才使他冷静下来，放弃辞退的意思。

和同时代许多科学家一样，牛顿是个虔诚的教徒。不过，在年轻的时候，他对上帝的本质有相当清醒的认识：

“关于他，我提不出什么假设，我是一个科学家，不愿作神学问题的设想。我不谈上帝，只谈人可以观察到的上帝的那些规律。”

对于这些规律的艰苦探索，导致牛顿一系列划时代的发现。现在，他孑然一身，囿于斗室，为了追求心灵的清净，终于沉溺在神学研究之中。他企图在对宗教的“理性探讨”中寻找精神的寄托。他在《修改的古代王国年表》中，想把圣经和宗教文件上记载的事件和天文事件联系起来；他的主要神学作品《对于但以理的预言和圣约翰的启示录的观察》企图对“上帝的创造”提供科学证据。他曾经认为自己工作的主要价值在于对上帝的研究和对天启教[①]的支持。牛顿的伟大才智踟蹰于宗教的迷津之中。

自然哲学的数学原理

1684 年 8 月，一位不速之客的来访，促成牛顿科学生涯中一次新的高潮。

这年 1 月，青年天文学家哈雷和胡克、皇家学会创始人之一的雷恩等人在伦敦讨论引力的规律。他们都猜测引力和距离平方成反比，可是谁也证明不了。经过半年多紧张的思考，仍然毫无结果。于是，哈雷专程来到剑桥，登门向牛顿求教。哈雷比牛顿年轻 14 岁，一向敬佩牛顿的才华，自称是牛顿“最忠实的崇拜者”。他知道，引力问题如果有谁能够解决，那么，这个人一定是牛顿。

哈雷恭恭敬敬地向牛顿问好，并且说明来意。他问牛顿：

“如果一颗行星受到太阳的一种同它们之间的距离平方成反比的引力作用，这颗行星应当沿什么样的曲线运动?”

“椭圆，”牛顿不假思索地回答，他的头并没有从一大堆宗教书籍中抬起来。

牛顿轻描淡写的回答对哈雷不啻是一声惊雷。他赶紧接着问：

① 天启教是善男信女对基督教一种颂扬的说法。

“你怎么知道的?”

“我计算过。”

这就是这次历史性会见的富有传奇色彩的片断。牛顿从18年以前在故乡发现万有引力定律以来，一直在追求对它进行验证的方法。经过不懈的努力，在哈雷来访以前，各项重大的障碍，包括质量均匀的球体的引力可以看做质量全部集中于球心的证明，除了个别的细节，都已经基本克服。牛顿从开普勒定律推导出引力的平方反比定律。也就是根据行星的运动，反过来求普遍的万有引力的规律。这样复杂的推理，对于不谙微积分的学者是难以想像的。可惜，牛顿并不忙于把它整理出来，更不想把它拿去付印出版。他担心，发表出来会招致一连串批评和责难。他对这一类批评指责几乎抱有一种病态的反感。因此，这个伟大成果连同它的大量思考和计算一起，一直被默默地锁进他的头脑或抽屉里。

哈雷的热情感染了牛顿。过了3个月，牛顿把详尽的计算结果写成了一篇题为《论运动》的文章，寄给哈雷。哈雷深深感到牛顿工作的极端重要性。他一面把牛顿论文呈报皇家学会备案，学会为此发了通报；一面在学会鼓励下，仆仆风尘赶到剑桥，说服牛顿把他的发现整理出来公开发表。这样，在哈雷的力促和皇家学会的支持下，牛顿终于走出宗教的迷宫，以他非凡的才智和罕见的精力，开始撰写不朽的巨著《自然哲学的数学原理》。为了保证写作顺利进行，学会为牛顿配备了一位青年秘书——同姓不同宗的汉弗莱·牛顿。

1685年初，牛顿正式开始撰写他的传世之作。一年以前的低落情绪已经被扫荡一空。他又沉醉在和伽利略、开普勒的心灵交谈之中。正如汉弗莱向别人介绍的那样，这些日子牛顿很少在夜里两三点钟以前睡觉，一天只睡五六个小时。一觉醒来，立刻想起研究的问题。有时衣服只穿了一半，就坐在床沿上思考起来。这期间他待人和蔼可亲，从不发怒，真是宁静又谦逊。他不骑马外出，也不玩九柱戏，甚至不散步。他极少离开房间。早饭往往啃几口苹果了事，

午饭则经常错过。

有一次，斯图克莱博士来访。午饭已经摆好，可是左等右等，牛顿总也不来。无可奈何的客人只好在汉弗莱招待下先用了餐。过了好一会儿，牛顿才从书房出来。他一边向客人致意，一边坐到餐桌旁准备吃饭。当他刚准备伸手去取餐巾，发觉桌子已经收拾干净，不由一愣。他好像觉察到自己的举止失当，含着歉意向客人叹息道：

“我的天，我以为我还没吃饭呢，原来我已经吃过了。”

为了写书，牛顿真正到了“废寝忘食”的地步。这不是普通的写作，这是一种神圣的历史使命。牛顿了解，在他之前，伽利略、开普勒、惠更斯等人分别发现了落体运动、行星运动和钟摆的运动规律。然而他们没有揭示运动的普遍规律，而且在分析推理过程中，由于缺乏严密的数学论证，以致有些结论是错误的。牛顿根据他 20 多年的研究心得，决心总结出运动普遍遵循的基本定律；再通过数学演绎，建立一些特殊的运动规律。他拟就了一个宏伟的计划：总结和发展历史上关于物体运动的科学成就，建立一个完整的物理科学体系。

为了使不熟悉他的流数法的读者能够看懂全书的中心主题——宇宙间运动的和谐，也为了避免因为流数法可能招来的非议，他决定采用经典的几何方法。不过，在几何证明中，他还是利用了微积分中极限的概念。物理学发展历史证实，特定的物理世界总有它一定的数学结构，形式可以多种，概念实质一样。牛顿一向十分欣赏惠更斯的几何论证的优美巧妙，他要使自己的作品同它媲美。

虽然《原理》主要是研究天体力学，但是对数学的发展具有极大的重要性。实际上，正是为了解决书中所提出的各种迫切需要解决的问题，才导致微积分的发明；而《原理》提出的新课题和研究方式，在 18 世纪产生了大量的数学分析的成果。

《原理》第一卷是全书的基础，完成于 1686 年，它阐明力学的原理，建立伟大的经典力学体系。第二年春天接着完成了第二、第三卷。第二卷是讨论有阻力的介质中物体的运动和流体运动；第三

卷就是著名的《论世界体系》，把第一卷建立的普遍原理应用于太阳系。整个著作体现了牛顿探索自然的精神：从实验提供的基本定律出发，通过数学演绎论证，建立完整的科学体系，进一步解决各种实际问题。

牛顿在序言中清楚表述了自己的基本观点：

"……我献出本书作为哲学的数学原理，因为哲学的全部要旨看来在于——从运动现象，去考察自然的力，然后从这些力去阐明其他的现象。"

可以说，以《原理》为开端，整个物理学不断地在实现牛顿的这个伟大纲领。牛顿在《原理》中初步说明了引力。19世纪法拉第和麦克斯韦等人初步说明了电磁力。20世纪爱因斯坦相对论修正经典引力场和电磁场理论，使人类对引力和电磁力有进一步的认识；而量子物理学家用量子论初步说明新发现的核力，它分为强弱两种作用；后来他们又用规范场论[①]初步统一了电磁相互作用和弱相互作用，向统一场论迈进了一大步。在逐步认识这些自然力的同时，物理学说明了大量特殊的自然现象，推动整个科学技术迅猛发展。

可是，《原理》的出版远不是一帆风顺的。由于财政拮据，皇家学会无力承担印刷费用。热心的哈雷再一次挺身而出。他亲自筹款，支付出版费用。为哈雷的热忱帮助而深深感动的牛顿，在《原理》的前言中表达了自己由衷的谢意：

"目光敏锐、博学多才的学者埃德蒙·哈雷为本书的出版付出了艰辛的劳动。他不仅为校阅和画图费神，而且归根到底是他促成我写出这本书。正因为他要我论证天体运动轨道的形状，并且把结果呈报皇家学会，使我也得到学会的鼓励，我才决定撰写本书。"

这样，科学史上不朽的巨著《自然哲学的数学原理》终于在

---

① 规范场是研究自然力的基本理论。1954年旅美中国物理学家杨振宁等人将外尔早年提出的规范场与李群相联系，建立非阿贝尔规范场，揭示了对称性决定自然力的原则，导致后来格拉肖、温伯格和萨拉姆等人将电磁力与弱力统一。1972年中国数学家陆启铿证明规范场的势是主纤维丛上的联络，为规范场研究提供了几何工具，更导致四维流形研究的突破。

1687 年 7 月问世。

可能没有哪一个自然规律像牛顿在《原理》表述的万有引力定律那样简单而概括这么多的自然现象；也可能没有哪一部科学著作像《原理》那样，对 17 世纪以来的科学产生这样广泛而深刻的影响。根据牛顿的理论，先后准确地找到太阳系边缘的两名成员海王星和冥王星。拖着长尾巴的彗星一向被迷信的人看做不祥的征兆。哈雷于 1680 年发现一颗最明亮的周期彗星——哈雷彗星。他根据牛顿万有引力定律，算出彗星的轨道是扁长的椭圆，周期约为 76 年。果然它如期回归。最近一次回归是 1985 年 11 月 8 日，许多读者有幸看到了它。

牛顿力学的辉煌胜利，使理性在神秘莫测的宇宙空间战胜迷信而确立自己的地位。虽然在当时能够看懂牛顿在《原理》中论证推理的人屈指可数，但是同时代的英国人都能感觉到它的伟大意义，并且把《原理》的作者几乎当作神明来崇拜。几年以后，当剑桥和牛津两所大学先后开始讲授《原理》的时候，法国正被笛卡儿的天使般的漩涡搞得眼花缭乱。不过，在《原理》把法国人从神秘主义羁绊下解脱出来以后，牛顿在天之灵发现，他的伟大继承人不在英国而在法国。法国的拉普拉斯给自己提出一项伟大的任务：继续和完成《原理》所奠基的天体力学大厦。

别了，剑桥

但是，牛顿不能永远"与世隔绝"，沉浸在和伽利略、开普勒的心灵交流之中。牛顿的时代，英国充满了社会矛盾和宗教冲突。

1687 年，代表天主教复辟势力的英国国王詹姆斯二世不顾剑桥大学的宪章，硬要剑桥大学把文学硕士学位赠送给天主教神甫弗朗西斯·本尼狄克特，并请他作大学理事会理事，以攫取管理学校的权力。大学领导人皮切尔对此婉言拒绝。这可气坏了詹姆斯二世，他立刻命令皮切尔和大学理事会代表到伦敦最高法院候审。《原理》

还没有出版，牛顿作为理事会八位代表之一来到伦敦。狡猾的大法官杰弗里斯把皮切尔等人羞辱一番，要他们按任神职时宣誓的那样，绝对服从国王命令，在一份屈辱性的协议书上签字。这时，牛顿胸有成竹而沉默不语。他得到过国王的恩准，免任神职。杰弗里斯的威胁对他没有作用。当代表们无可奈何准备妥协的时候，牛顿站了出来。他义正词严地向大法官声明：

“如果国王陛下执意提出一项不合法的要求，那就没有一个人会因为拒绝执行而苦恼！”

在这场看来力量悬殊的斗争中，牛顿又一次表现出当年和“小霸天”搏斗的可贵勇气。色厉内荏的国王看到镇压难以取胜，只得收回成命。牛顿后来在谈到这次胜利的时候写道：

“有法律在我们一边，在这些事情上，有一种诚实的勇气就能确保胜利。”

“诚实的勇气”，说得多么朴实。它在为人处世上需要，在科学上何尝不需要呢！

1688 年，英国资产阶级赞成君主立宪的国教派赶走詹姆斯二世，拥戴威廉三世即位。第二年 1 月，由于牛顿政治上反对绝对君主制并且以高度的勇气维护过剑桥的尊严，他作为剑桥的代表被选为国会议员。不过，他对政治演说远不如对学理的探究感兴趣。他讨厌夸夸其谈。他在议会上惟一的一次开口说话，是请侍者把窗户关上。

在伦敦，牛顿结交了许多名人，密切了和当代大科学家惠更斯、玻意耳等人的关系，结识了著名经验主义哲学家约翰·洛克。牛顿还参与了沃利斯《代数》一书的修订工作，并且写了第 390 页到 396 页那些段落。1693 年发表的这本书首次披露了牛顿的流数法思想。这些社交活动扩大了牛顿的影响，促进了学术交流。但是，牛顿在经济上仍感拮据。他想谋取一个俸禄较高的职位，然而没有成功。

1692 年议会解散，牛顿返回剑桥。他在伦敦谋职失利的不快还没有消除，更为痛苦的事又发生了。劳累一生的母亲得了重病。牛

顿看到自己的学识、名位不能减轻母亲的病痛，心里不由觉得十分哀伤。

母亲去世，牛顿异常悲痛。看到他那精神恍惚的样子，亲友们都感到不安。真是祸不单行。有次牛顿出去做礼拜忘了熄灭烛火。小狗碰翻了烛台，酿成一场不大不小的火灾，把牛顿多年写成的文稿烧成灰烬。牛顿沮丧得一句话也说不出来。

长期废寝忘食地紧张工作，接二连三的精神打击，终于诱发了牛顿严重的神经衰弱症。忧郁，失眠，厌食，语无伦次，以至有迫害狂的症状。妹妹安娜得知消息，赶紧让女儿卡德琳来服侍患病的舅舅。老朋友、新知己、得意门生以至欧洲各地的学者，都关注着牛顿的病况。经过一段时期精心调养，牛顿的病情大有好转。这使亲人们转忧为喜。好消息传出去，朋友们包括胡克和莱布尼兹这些学术上的对手，都深深舒了一口气。但是，知己的朋友们清楚，要驱除牛顿的病根，就要为他谋取一个待遇优厚的官职，改善他的经济生活，使他心情舒畅。

1694 年，牛顿的得意门生查理·蒙塔古，也就是后来的哈利法克斯伯爵，当时任财政大臣。他积极筹划任命牛顿担任造币厂督办。因为英国货币残破不堪，需要造币厂重铸新币。牛顿通晓冶金、化学，足可以担当这项重任。

1696 年 3 月，牛顿接到蒙塔古的信，得知国王已任命他为造币厂督办。这是个高薪的职务。到伦敦赴任，是无可犹豫的。然而告别剑桥，牛顿不无眷恋之情。他不禁回忆往事，浮想联翩。那诗一般的薄雾笼罩下的小桥流水，那梦一样的烟雨中青苔斑驳的校舍，那闪忽不定的烛火和悠扬的教堂钟声，多少个日日夜夜啊，多么艰苦又多么使人留恋！有锲而不舍的探索，也有激烈的争论；有痛苦的挫折，更有成功的欢欣。终于，写出了《原理》，物理学有了个全新的起点。然而，敬爱的巴罗老师已经溘然长逝，自己也年过半百。真是光阴似箭，一瞬即逝啊。别了，亲爱的小屋，亲爱的实验室，亲爱的剑桥！

1696年春天，牛顿走马上任，迁往伦敦。面对铸造新币的紧迫任务，牛顿振作精神，精力充沛地投入工作。经过两年努力，顺利完成任务。不久牛顿晋升为造币厂总裁，生活随着大有改善。就在这一年，牛顿还被选为法国科学院外籍院士。这时，牛顿可谓富贵荣华都不缺了。不过，他在剑桥大学的工作实际上已经无法继续承担。1701年年底，牛顿终于辞去剑桥的教授职务。不过，他还是作为剑桥的代表被选为国会议员。

1703年1月30日，牛顿被选为皇家学会会长，这完全是“众望所归”；以后他连选连任。不久，3月3日胡克去世。牛顿看到，现在出版他光学著作时机已经成熟。他把拉丁文稿译成英文，适当扩充，写成著名的《光学》一书。在书中，牛顿讨论了光的反射、折射、干涉和偏振[①]现象以及颜色理论。在附录里给出了三次曲线的分类。对于干涉、偏振的分析是初步的。而对所谓牛顿环现象的解释并不完全正确。关于光的本性，牛顿主张微粒说。不过，他不像他的后继者那样，完全排除光的波动说，充分表现了他的明智和谨慎。在1931年重印的英文第4版序文中，爱因斯坦对《光学》这部著作作了极好的评价：

“只有这本书，才能使我们有幸看到这位无与伦比的人物的活动。”

1705年，安妮女王封牛顿为爵士，以表彰他科学上的成就和对造币厂的贡献。这对自然科学家是破天荒第一次。第二个荣获封爵的是英国化学家戴维，那是整整100年以后的事了。

真理的大海之滨

牛顿写完《原理》以后，没有更多重大的科学创造。是因为他能力衰竭了吗？不是。虽说上了年纪，牛顿的数学才智不减当年。

① 偏振指横波的振动矢量（垂直于波的传播方向）偏于某些方向的现象。

1696 年，瑞士著名青年数学家约翰·伯努利（1667-1748）提出两道数学难题，其中一道是对分析数学有深远影响的最速降线问题，给 6 个月期限，请“全球最聪明的数学家”解答。牛顿收到题目，从午后 4 时开始考虑，到次日凌晨 4 时就解答出来，并且写成一篇完美的文章。伯努利看到刊登在皇家学会会刊上牛顿这篇没有署名的解答，禁不住赞叹：

“啊，我认出来了！是狮子用了它的利爪！”

甚至到 1715 年，牛顿已经 73 岁的高龄，在和莱布尼兹为微积分发明权争论的时候，他接受对方解一道数学难题的挑战。经过造币厂工作一天的劳累，牛顿在睡觉以前解出了这道难题，找到了寻求与已知曲线族正交的曲线族的一般方法。

可是，牛顿毕竟是有血有肉的凡人。他既不能完全摆脱对荣华富贵的追逐，也不能挣脱宗教的羁绊。他要用大量的时间和精力应酬官场；还得充当本特利牧师一类神学家的科学顾问，谨慎小心地论述上帝的光荣伟大，考证圣灵的神秘征兆。这就不免使自己长久地陷入神学思辨之中。牛顿在神学上有 150 万字的遗稿，还为炼金术徒劳地写了几十万字论述。这不能不使牛顿的后半生，和他辉煌的前半生相比，相形见绌了。

牛顿一生历尽千辛万苦，在科学上建立了丰功伟绩，然而命运之神并没有让老人“无疾而终”。无论是风湿和胆结石两症并发，或者是后人化验牛顿的头发发现，牛顿有品尝金属的嗜好而造成微量元素中毒，事实是，1727 年初，牛顿病倒了。朋友们送他到肯辛顿疗养。可是，他不顾日益严重的病痛，坚持回伦敦主持 2 月 28 日的皇家学会例会。3 月初返回肯辛顿，病情严重恶化。牛顿明白，自己余下的日子不多了。

回忆往事，他不介意过去的苦难，也并不真正看重世俗名利的争夺。真实而永存的，只有那用数学语言谱写的自然的韵律。他似乎听到了太空中传来的谐音，然而不十分真切。他知道得最清楚的是，他不知道形形色色自然现象的究竟。他在前人的基础上达到了

一个新的高度，但是，这只是个起码的出发点。想起人们对他的过誉，他感到很不安。他趁自己神志还清醒的时候，给后人留下一段遗言：

“我不知道，世上人会怎样看我；不过，我自己觉得，我只像一个在海滨玩耍的孩子，一会儿捡起块比较光滑的卵石，一会儿找到个美丽些的贝壳；而在我前面，真理的大海还完全没有发现。”

这段著名的临终遗言，不是一般自谦的话。这是牛顿拿起了人类认识自然的标尺，来估量自己一生探索的结论。牛顿力学给出宏观低速运动的普遍规律，把人们带到真理的大海之滨。然而从地球到宇宙，从人体到原始生命，乃至一般的物质和运动，人类了解得还太少。

牛顿还有一段名言，那就是他给胡克信中写的一段话：

“我之所以比笛卡儿看得远些，是因为我站在巨人的肩上。”

它精辟地阐明了人类探索自然伟大事业的继承和发展的道理。实际上，牛顿正是在以哥白尼、伽利略、笛卡儿、开普勒为代表的先驱者们的工作基础上和他们的精神感召下，抛弃了普通人所追求的种种享乐，通过远远超出常人所能想像的艰苦劳动，把他那举世罕见的才智和力量，献给了探索自然的科学事业。

牛顿划时代的伟大贡献就是创建微积分，逐步地建立经典物理学体系，从而奠定了近代物理学的基础。这种科学壮举是空前的。但是，任何人都有历史的局限性，伟人也不例外。牛顿创立了微积分，但是他还没有可能为它提供严密的理论基础。他的流数法在形式上远不如莱布尼兹的微积分便于推广使用。他的绝对时空观被爱因斯坦相对论推翻。他的光的微粒说和决定论因果律被20世纪量子论的波粒二象性和统计性因果律所代替。将近200年中给科学以稳定和指导的牛顿经典物理学体系后来受到接二连三的冲击和挑战。他出于宗教的虔诚，把自然运动的终极原因归之于上帝，以致被教会顽固势力所利用。但是，牛顿毕竟是超乎寻常的伟人。他的伟大还在于，即使在科学上有局限性的方面，比如绝对时空观、微积分

的基础和微粒说等，他都有审慎的保留，表现了令人叹服的预见性。牛顿一生的科学活动和他的著名遗言，再好不过地体现了这位伟大科学家的科学态度：不主观臆造，实事求是，精益求精。

胆结石的剧烈发作，使老人备受痛苦的折磨。不过，走向生命的终点的时候，他的心情坦然而平静。3 月 18 日，老人陷入昏迷。1727 年 3 月 20 日凌晨，这位旷古未有的科学巨人在安眠中与世长辞。



莱布尼兹

(1646—1716)

我有这么多的想法，假如某一天某地的人能够比我更深入地对它们加以研究，并且把他们思想的妙处和我的劳动结合起来，这些想法很可能有一天会得到利用。

——莱布尼兹

由远而近的马车

蓝天白云之下，大地恬静而舒展。西斜的太阳让树林、田野和远处的山峦都带上了倦意。灰褐色的道路一眼望不见尽头。一辆马车由远而近，嘚嘚嘚的马蹄声表明它在急速地赶路。

颠簸的车厢里坐着一个英俊的青年。他不凭窗眺望，却埋头在旅行箱上疾书。当他停笔思考的时候，深思的目光中露出一丝怏怏的神情。一个人受到不公正的待遇，难免不高兴，何况是个血气方刚的青年。20岁的莱布尼兹刚刚从莱比锡大学毕业。因为嫉妒他的知识和才华，教授会竟借口他太年轻而拒绝他的博士学位的申请。莱布尼兹一气之下离开莱比锡，决定到纽伦堡去争取学位。他现在赶写论述教授法律新方法的论文，就是为迎接新的学位考试作准备。

少年在沉思中

1646年7月1日，戈特夫里德·威廉·莱布尼兹出生于莱比锡

的书香门第。父亲弗雷德里希是莱比锡大学的伦理学教授。母亲卡德琳娜·舒马克是斯拉夫人的后裔，也是书香门第。莱布尼兹一家三代为萨克森政府服务，可以说是典型的士大夫阶层。

小莱布尼兹在浓厚的学术气氛中长大。他进尼可莱学校的时候，已经显出他的早熟。教师想用固定的教材来限制他，免不了出现早熟儿童和常规教育之间常见的矛盾。小莱布尼兹不愿意接受老师的限制和校规的约束，主要在家里自学。他 8 岁开始学习拉丁语，12 岁能够用拉丁文作诗，很快又精通了希腊语。

1652 年，小莱布尼兹才 6 岁，父亲不幸病故。他想念父亲，常常跑进父亲的藏书室，翻阅父亲生前阅读的书籍。小莱布尼兹继承了父亲对历史的兴趣。从父亲丰富的藏书中，他知道了古希腊的文明和罗马帝国的兴衰，十字军和成吉思汗的征讨，迷人的中国和印度的东方文化，……古代语言的学习已经满足不了他的求知欲望。连绵 30 年的德意志内战好不容易结束了，但是它给国家和人民留下深重的苦难，动摇了小莱布尼兹对古代战争的向往。算术中单调的运算也使他感到乏味。和笛卡儿一样，莱布尼兹在阅读的时候愈来愈多地停下来沉思默想，而且随着年龄的增长，思考得愈来愈深入了。亚里士多德是学术史上一位伟大的权威人士，虽然后来受到伽利略等人的挑战，一般人对他的学说是顶礼膜拜的。他的逻辑学三段论法，学者都奉为金科玉律，可是小莱布尼兹感到不满足。他认为，逻辑学不但应当帮助人们正确地思考和表达，而且应该使人们能够科学地、更富有成效地推理。莱布尼兹慢慢地萌发一种“普遍数学”的思想。他想通过数字和符号的组合和运算来思索推理，从而发现新的客观规律。许多这样年纪的孩子还处于混沌之中，小莱布尼兹想像的奔马却已经驰骋到荒无人迹的原野上了。

1661 年，15 岁的莱布尼兹成了大学生，在莱比锡大学攻读法律。他在学习法律的同时还广泛阅读哲学和历史的著作。开普勒、伽利略和笛卡儿等自然哲学家的作品使他耳目一新。和以前的哲学家单纯的思辨不同，他们使用数学语言来分析自然的数量关系。莱

布尼兹认识到，要了解自然，必须学习数学，因此，两年以后，他来到耶拿大学听艾哈德·维格特的数学讲座，学习欧几里得几何。维格特教授虽然算不上是富有创造力的数学家，但是欧几里得几何本身的魅力使莱布尼兹着了迷。要不是他头脑里已经装满各式各样的思想见解，他可能选择几何作为自己的终身事业了。欧几里得几何体系的逻辑力量对他产生这样深刻的印象，以致他后来试图用欧几里得的公理方法来处理伦理学；古希腊几何学家的光辉形象也使年轻的莱布尼兹无比崇敬，他深有感慨地说：

"了解阿基米德和阿波罗尼奥斯的人，对后代杰出人物的成就不会再那么钦佩了。"

阿基米德等先驱者们的伟大精神鼓舞着莱布尼兹去探索自然。

宏大理想

莱布尼兹没有沉醉在几何学里。他有更宏大的理想。从耶拿大学回到莱比锡，莱布尼兹又致力于他主修的法律，准备考博士学位。但是，他少年时代酝酿的"普遍数学"的思想时常萦绕在脑际。在研读笛卡儿著作的时候，他觉得笛卡儿重视代数方法是有道理的。但是，代数不应该停留在数量关系上，还要应用到逻辑推理上去。他感到"普遍数学就好比是想像的逻辑"，应该能够论述"在想像范围内可以精密确定的一切东西"。代数的符号表示概念，代数的运算代替推理。有了这种"代数逻辑综合"的科学，就可以建立起推理的普遍系统。想到这里，他按捺不住澎湃的思潮，连夜把自己的体会写下来，并且取名为《论组合的艺术》。

莱布尼兹指出，他的目的在于创造"一种普遍的方法，在那里，一切理性的真理都归结为一种计算。这是一种通用的语言或文字，但是它同到目前为止所设想的一切语言或文字截然不同。计算中的符号以至语言支配着推理，而错误，除了事实的错误以外，就仅仅是运算发生的错误了。要形成或发明这种语言或特征是非常困

难的，但是，不用任何词典，要了解它却是非常容易的。”后来，他还向惠更斯介绍过这种方法：它具有“完全不同于代数的全新的特征，它对于确切而自然地表达思维有极大好处。它没有图形，一切取决于想像。……这种方法能够简单而确定地导致所要求的结果。我相信力学几乎可以和几何学一样，用这种方法来处理。”他认为这种方法比笛卡儿的几何更加优越。果然，到19世纪，卓越的德国数学家、语言学家海尔曼·格拉斯曼（1809-1877）终于发明用直接的符号运算来研究几何的方法。

在论文中，莱布尼兹把那些不相同又不重叠的所谓原始概念分别用一些素数来表示。比如用“3”表示“人”，用“7”表示“理性的”，那么“21”就表示“有理性的人”。当然，从这样简单的办法到实现他的理想还有一段漫长的路程。经过进一步的研究，莱布尼兹得到一些真正属于今天逻辑代数的结果。他直接或间接地建立“逻辑和”、“逻辑积”和“等同”、“否定”、“空集”、“包含”等重要概念。

令人感兴趣的是，在《论组合的艺术》中，莱布尼兹还分析了高阶等差数列。因此，他后来独立于牛顿建立了微积分就不难理解了，因为他的微积分中一个想法就是把高阶的“差”可以略去作为基础的。

莱布尼兹完全知道，整个工作必须经过长期艰苦的研究才可能完成，而他自己的认识还很不成熟。因此他戏称自己的《论组合的艺术》是一篇“学童论文”。的确，莱布尼兹的远见卓识对于同时代的数学界和科学界的同行，如果说得客气一点，没有把它当作痴人说梦的话，那么也仅仅是梦想而已。一直到19和20世纪，经过逻辑代数创始人，英国数理逻辑学家布尔（1815-1864）、德国数理哲学家、逻辑学家弗雷格（1848-1925）和在数理逻辑、数学基础上有重大成就的美籍奥地利数学家哥德尔（1906-1978）等人的努力和发展，莱布尼兹的理想才部分地得到实现。一门新兴的学科——数理逻辑诞生了。数理逻辑又称符号逻辑，它是用数学方法研究关于

推理、证明等问题的一门学科。它在开关线路、自动化系统和计算机设计等方面得到广泛的应用，对数学的基础和人类社会生活有不可估量的影响。

这一年，牛顿在故乡乌尔索普获得了划时代的伟大发现，而历史或许有一天会证明，莱布尼兹“学童论文”的意义并不亚于牛顿的发现！

马车上的学者

莱布尼兹在莱比锡大学申请博士学位的挫折很快过去。1666 年 11 月 5 日，莱布尼兹以他在马车上赶写的《论教授法律的新方法》一文轻而易举地在纽伦堡阿尔特道夫大学分校得到博士学位。学校聘请他留校当教授。和当年笛卡儿谢绝接受中将军衔一样，莱布尼兹婉拒了学校的邀聘，声称自己另有志向。他看不惯当时大学里保守、教条、拘泥细节和无所作为。莱布尼兹的志向是什么，他自己没有说明。不过，无论如何，决不像是后来命运所安排的：为王公贵族考证和修订已经发霉的家谱！

这是莱布尼兹的悲剧：他在结识科学家以前，接触的是法学家。莱布尼兹的博士论文受到美因茨选侯亲信们的注意。他们劝他把文章印出来送给选侯看。追求功名之心正切、人生阅历尚浅的莱布尼兹一口答应了。文章果然大受赏识。选侯召见莱布尼兹，委任他负责法典的修订，后来又让他充当选侯的外交官去完成各种微妙的使命。

从那以后，莱布尼兹关于“普遍数学”的宏伟蓝图被束之高阁；他的聪明才智被虚掷在诸侯们勾心斗角、争权夺利的漩涡之中。得到的回报只是一两句无关痛痒的夸奖和一大堆闪光的钱币。

作为公侯显贵们的顾问、律师、教师和外交官，莱布尼兹由于那帮老爷们反复无常的命令，长年在欧洲四处奔走。马车从荷兰的阿姆斯特丹到意大利的罗马，从法国的巴黎到比利时的布鲁塞尔，

他的大部分岁月就是在那坎坷不平的道路上、在四面通风的马车里度过的。长期单调疲乏的旅途生活，使脑子一刻也闲不住的莱布尼兹把车厢变成了工作室。他把在各地听到和见到的新事物、新思想带到马车上来细细分析、批判、吸收，再加上自己的创见，最后伏在箱子上把它们写成一篇篇独具风格、意义深刻的作品。这就是今



莱布尼兹来叩现代数学的大门

天仍然一捆捆地收藏在德国汉诺威图书馆里发黄的、开本不同、纸质各异的文稿，期待着耐心的读者去考查研究，就像从稻草垛里筛出谷粒一样，从文稿中拣出作者有价值的作品。

从已经发表和还没有发表的作品来看，莱布尼兹研究所涉及的领域达41个之多。无论是政治、经济、外交、法律，还是哲学、语言、历史、神学，以至天文、地理、地质、采矿、……几乎可以说，凡是当时学术界所涉及的一切领域，都有莱布尼兹的杰出贡献。更使人惊叹不已的是，各个学科的专家、权威，无一例外地把莱布尼兹奉为这些学科历史上的大师。如果说学术史上曾经有过门门精通的全才，那么，配得上这个光荣称号的莫过于莱布尼兹了。不过，到现在为止，他在数学上的工作相对来说是比较少的。除了一篇有关“普遍数学”的“学童论文”，还没有更多的作品。

1672年。早春三月的巴黎，和风拂面，阳光铺地。枝头上绽出的点点新芽迎接着春天的来临。一辆风尘仆仆的马车来到一幢灰色楼房前面，嘎的一声停下了。这是克里斯蒂安·惠更斯的寓所。从车里跳下一位穿着黑礼服，身材颀长的青年。他快步走到雕着花纹的深褐色的大门前，举起了手——莱布尼兹来叩现代数学的大门了。

名师指路

1672年3月，莱布尼兹作为美因茨选侯的使节来到巴黎。他和惠更斯历史性的会见，揭开了数学史上光辉的一页。

克里斯蒂安·惠更斯是荷兰著名的物理学家、数学家和天文学家。早在17世纪50年代，惠更斯就以对钟摆的研究而闻名遐迩。他通过长期的观测，首先证明土星的光环完整地围绕着这个行星，并且确定了光环平面和黄道的夹角。1659年，他第一次绘出火星的图像和猎户座中的大星云。1663年，惠更斯被英国皇家学会选为第一位外籍会员。后来他又发现土星的最大卫星土卫六，并且指出它总以同一面对着它的主星，也就是它的自转周期和公转周期相同。

惠更斯最杰出的贡献是在光学方面。1678年他提出光的波动说。利用这个学说可以很好地解释反射和折射等光传播过程中的现象。他提出的确定波前位置的几何方法精确地适用于一切波动现象，以惠更斯原理驰名。惠更斯和笛卡儿、伽利略、牛顿等人一样，十分重视数学在科学研究中的作用。1657年，他发表《关于骰子游戏或赌博的计算》是概率论发展初期的重要文献。他在研究钟摆的同时，研究了渐伸线和渐屈线，给出曲线曲率半径的计算公式。他还计算过蔓叶线的弧长和抛物面、双曲面的表面积。

莱布尼兹来向这位长发披肩、红光满面的大学者讨论问题的时候，惠更斯拿出自己的新作《摆动的时钟》请莱布尼兹提意见。在论文中，惠更斯利用数学方法揭示了一个并不直观却十分重要的力学规律：沿着摆线弧摆动的钟摆，不论振幅大小，作一次完全摆动的时间是相同的。这就是复摆的等时性。

看着看着，莱布尼兹完全被数学方法的神奇威力所摄住了。他深深地为他自己“以前基本上不懂数学”而遗憾。他恳请惠更斯给他补课。不用说，为这样一位聪颖绝顶、精力过人的朋友上课，惠更斯是无法推辞的。莱布尼兹如饥似渴地听惠更斯介绍格雷果里①、卡瓦列里②、伽利略、托里拆利、罗贝瓦尔、帕斯卡、笛卡儿、费马和巴罗的著作，激起他巨大的热情。他一边研读，一边做了大量的笔记，很快就达到这个世纪数学的前沿。他已经作好一切准备，去迎接这个世纪最伟大、最激动人心的决战。

微积分的发明

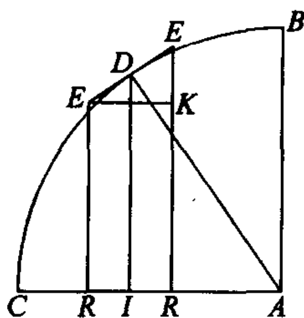
1673年1月，莱布尼兹作为选侯的侍从，渡过波涛汹涌的多佛

① 詹姆斯·格雷果里（1638-1675）是英国数学家和天文学家，发表了微积分基本定理的最早证明，对微积分的发现有贡献。

② 弗朗西斯科·卡瓦列里（1598-1647）是意大利数学家，发展了几何学，这方面的工作成为积分学的先驱。

尔海峡来到多雾的伦敦。这次旅行使他有机会结识包括巴罗和牛顿在内的许多英国科学家。和这些学者的思想交流，大大开阔了莱布尼兹的视野，促进了他的数学研究，特别是巴罗表示变量变化局部关系的几何图像，也就是所谓的特征三角形，给莱布尼兹留下深刻的印象。

这些日子，选侯忙于他的私人应酬，莱布尼兹正好抓紧时机夜以继日地在住所研究。有一次，他在一本小册子上看到一张图，顿时像触电一样被吸引住了。这是布莱斯·帕斯卡在1659年写的《四分之一圆的正弦论》一文中的插图。帕斯卡写道，*AD* 比 *DI* 等于 *EE* 比 *RR* 或 *EK*，当区间很小的时候，弧可以代替切线。帕斯卡用这个引理去求一段曲线的正弦（纵坐标）的和，也就是这段曲线下的面积。可惜帕斯卡没有深入下去。这大概是他只把数学作为有趣的消遣，而“不愿为它多走两步”的结果吧！不然的话，帕斯卡将比牛顿和莱布尼兹更早就找到微积分的要害。莱布尼兹看到这里激动得彻夜难眠。他敏锐地意识到，帕斯卡被什么东西蒙住了眼睛，以致没有发现这里面所包含的更普遍的真理。



莱布尼兹完全清楚，这项研究的意义非同小可。这将开创一门全新的学科。他发疯似地进行工作，写出了成百上千页的草稿和笔记。问题不断深化，记号逐步完善。1675 年 10 月 29 日，后世习用的积分符号∫ 创造出来了。它是拉丁字母 sum（和）的第一个字母的拉长。在这期间，他紧紧抓住微积分的要害不放，这就是微分和积分运算互逆性的探索。马车在暮色下跌跌撞撞地前进，凛冽的寒风冻麻了莱布尼兹的手脚，可是他的脑海却像翻腾的大海，进行着激烈的斗争。经过锲而不舍的思索，捷报终于传来。1675 年 11 月

11日，莱布尼兹的《切线的相反方法的例子》完成了！这是一个具有历史意义的日子。经过人类2000多年的奋斗，莱布尼兹独立于牛顿也创立了微积分！这门新兴的学科揭示了自然界运动变化的数学规律，极大地推动科学技术的发展。对于这样一个人类智力奋斗的伟大结晶，恩格斯给予崇高的评价：

"在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看做人类精神的最高胜利了。"

莱布尼兹在这篇历史性的论文中明确地断言，作为求和过程的积分，是微分的逆运算。这就是后世以牛顿-莱布尼兹命名的微积分的基本定理。要知道有多少个数学家，包括费马、帕斯卡、巴罗和惠更斯在内，长期在这样一个重要的事实面前徘徊而不能识破啊！这说明莱布尼兹具有超人一等的洞察力。第二年6月26日，莱布尼兹进一步明确：求切线最根本的方法就是求在切点处曲线的斜率，也就是曲线在这一点的导数。1677年7月11日，莱布尼兹纠正了他1675年11月11日历史性手稿中的一处错误，正确地给出了两个函数的和、差、积、商的求导公式。同年11月，他得到了幂函数求导和积分的一般法则。1680年，莱布尼兹用和今天相近的形式，计算坐标系内曲线下面图形的面积和曲线绕x轴旋转所得的旋转体体积，其中，莱布尼兹使用无限小的术语，建立了他的无限小的方法。

1684年，莱布尼兹在他创办并且主编的《教师学报》上首次发表他的微积分论文。这篇论文有一个很长的题目：《一种求极大值与极小值以及切线的新方法，它也适用于分式和无理数，以及这种新方法的奇妙类型的计算》。从这以后，莱布尼兹的微积分的有关成果陆续发表，内容相当于后世的初等微积分和它的几何应用。其中主要的是1686年发表的《潜在的几何与分析，不可分和无限》。

作为哲学家的数学家，莱布尼兹在微积分创立中，根据他哲学上的"单子论"，认为万物的基础是终极的、单纯的、不能扩展的精神实体所谓"单子"，提出了无限小的思想，这是和牛顿的物理方向不同的。到20世纪60年代，无限小思想得到进一步的开发。

美国数学家鲁宾逊等人以数理逻辑模型论的概念和方法，建立起分析的非标准模型，对数学的发展产生相当大的影响。

莱布尼兹微积分的另一个特点是他的记号便于使用，表现有力，大大有利于推广和应用。这是一套一般人都能够使用的简便的法则，而他的符号，直到今天仍然很自然地适用于微分形式理论。这种方法具有这样大的魅力，以致远在瑞士巴塞尔的雅各布·伯努利（1654-1705）和约翰·伯努利两兄弟看到莱布尼兹在《教师学报》上的论文，先后抛弃自己原来的职业，决定去作数学家！

伯努利家族原是比利时王国安特卫普的望门大族。全家笃信新教。1583 年，为了逃避天主教国王的宗教迫害，举家从安特卫普逃到联邦德国工商业中心之一的法兰克福，最后在瑞士的巴塞尔定居。伯努利家族是科学史上有名的科学世家。仅就数学来说，自从雅各布和约翰兄弟以来，伯努利家族至少产生了 11 位具有世界声望的数学家，在 17、18 世纪为微积分的推广、应用和发展起了重要作用。伯努利家族的数学家有一个有趣的特点：他们都是半路出家的。他们的父亲，无论自己是不是数学家，都要求自己的儿子学法律或者经商，要不就攻读神学或医学，但是一定不能从事数学研究。可是事与愿违，伯努利的子弟在父兄的影响下，最后都不约而同地来到看起来枯燥无味却其乐无穷的数学王国聚首。

雅各布·伯努利本来是研究神学的，莱布尼兹的论文使他成为微积分的大师，为微积分的普及、发展和应用作出巨大贡献。他在解析几何、概率理论和变分法等方面都有重要成就。雅各布的弟弟约翰，本来是个医生，在雅各布的影响下也成了数学家。约翰的著述比雅各布更丰富。他为微积分在欧洲的普及做了大量工作。他在微积分、微分方程、变分法和几何等方面有杰出成就。在光学、潮汐理论，帆的数学理论和力学的虚位移原理等方面也有重要贡献。

伯努利兄弟和莱布尼兹建立了密切的通信联系，并且成为好朋友。伯努利兄弟惊叹莱布尼兹超人的洞察力和敏锐深邃的思想；莱布尼兹钦佩伯努利兄弟的数学才能和钻研精神。莱布尼兹多次发觉，

由于自己的研究没有及时公开，雅各布重复了他的工作。后来，莱布尼兹和伯努利兄弟的关系密切到这种程度：当雅各布和约翰为发明的优先权发生争执的时候，莱布尼兹不避嫌疑，以他特有的外交才能积极从中调解。他们的交流合作使莱布尼兹创建的微积分首先在欧洲大陆生根、开花、结果，并且形成了著名的“大陆学派”，为数学和科学技术的发展作出不可磨灭的贡献。

计算机先驱

莱布尼兹的微积分引起数学界的热烈反响并且得到迅猛的发展，可是他的另一项数学创造却没有受到当时数学界的应有重视，同时由于受技术发展的限制，没有很快兴起。这就是他对计算机的研究。

即使在向微积分实行最后冲刺的紧张时刻，早年“普遍数学”的梦想仍使莱布尼兹魂牵梦萦。他想由“代数运算”代替推理，使思维自动化。同时，他还想让单调重复的运算机器化，使人类从繁重的计算工作中解放出来。他不止一次地大声疾呼：

“让一些杰出的人才奴隶般地把时间浪费在计算上是不值得的。”

他不是耽于空想的人。他卷起袖子开始扎实的工作。他研究了帕斯卡在1642年设计制造的十进制数字计算机，并且从车船上的里程记录仪器得到启发。1671年，一种能够作加减乘除的分级计算机设计出来了。它通过多次的加减来实现乘除，还可以求平方根，因此莱布尼兹的机械远超过帕斯卡所发明的只能够作加减运算的计算机。欧洲轰动了。计算机还没有造出来，巴黎王室图书馆馆长皮埃尔·卡尔卡维就催着把它送去展览。1672年，模型制成了。但是由于当时机械加工的工艺水平低，3年以后计算机才真正造好。莱布尼兹带着它到各地表演，受到热烈欢迎。1673年3月，在他访问伦敦的时候，由于计算机的研制和其他的著述，莱布尼兹被选为英国皇家学会外籍会员。莱布尼兹并不满足。他发现，平时用起来很方

便的十进位计数法，搬到机械上去实在太麻烦。能不能用较少的数码来表示一个数呢？经过不断的摸索，莱布尼兹终于在1678年发明二进位计数法，也就是二进制。这样，用0和1两个数码就可以表示出一切数。比如用10表示2，11表示3，100表示4，101表示5，……发明二进制的意义不可低估。如果对机械式计算机来说，用二进制还是用十进制计数只是个方便和不方便的区别，那么对电子计算机来说，用二进制计数就是它不可或缺的基础了。因为在电学中，两种截然不同的稳定状态是大量存在的，如电容器的充电和放电，脉冲的有和无，电路的闭合和断开等，而要找出一种具有10种稳定状态的电子元件是困难的。

莱布尼兹从小对东方文明，特别对伟大的中华民族的古代文明，非常向往。他在年轻的时候看到中国古籍《易经》① 中用八卦阴阳来解释事物，曾经引起过莫大兴趣。他利用通信同到中国和锡兰的人士建立联系。1683年4月1日，莱布尼兹通过耶稣会理事白晋，得到邵雍②的64卦，也就是圆圆方位图和64次序图。他看了大为惊奇。他发现八卦图和他自己发明的二进制算法的思想完全一致。64图形就表示从0开始的前64个数！

1694年，莱布尼兹制成经过改进的计算机，它能够作加减乘除和开平方根的运算。当年，帕斯卡把他发明的计算机托笛卡儿献给瑞典的克里斯蒂娜女王，来博得她的欢心；而莱布尼兹却把自己的计算机送给康熙皇帝，以表示他对《易经》阴阳八卦学说的推崇。后来他还设计过更复杂的机械计算机，可惜限于当时的技术水平没有制成。19世纪，有人根据他的想法，制成了更高级的机械计算

---

① 《易经》是我国儒家经典之一，即《周易》，包括《经》、《传》两部分，约2.4万字。它把阴阳两种势力交感作用上升到哲学范畴，把世界万事万物组成统一体系，对秦、汉以后思想界发生深远影响，引起西方学者兴趣。

② 邵雍（1011-1077）是我国北宋哲学家，卒谥康节，世称康节先生。他从《周易》中演绎出宇宙构造图式的“象数学”（先天学），即运用一分为二、二分为四、四分为八的等比级数说明现实世界，并用以推测过去和未来。莱布尼兹在创立二进制时，曾受到邵雍象数学的启迪。

机。到20世纪中叶，更出现了对科学技术和人类社会具有巨大影响的电子计算机，它的计数基础正是莱布尼兹发明的二进制。

不幸的争论

自从1673年莱布尼兹访问英国结识牛顿以后，两人通过信件交流学术思想。虽然他们有截然不同的性格、禀赋和环境，探索自然奥秘的共同志愿却把他们联系在一起。那时候信件的传递很不容易。1676年初夏，牛顿由英国皇家学会秘书奥登堡转交的信，莱布尼兹直到8月份才收到。莱布尼兹在回信中，肯定牛顿在无穷级数、光色理论、反射望远镜研制等方面的成就，同时把他自己在微积分研究上取得的成果向牛顿作了介绍。可是10月27日牛顿来信表示，他不愿继续保持通信。信中只给出一个极难解出的字谜，却没有说明理由。对于这段往事，牛顿在1687年回忆道：

“大约10年前，在和非常博学的数学家莱布尼兹的通信中，我告诉他，我发明了一种可以求极大值与极小值、作出切线以及解答类似数学问题的方法。这种方法对于无理数和有理数同样有效。当我谈到这点时，我没有把方法告诉他。这位知名人士回信告诉我，他也想到了类似的一种方法，并且把它告诉了我。他的方法除了定义、符号、公式和算出数的想法在形式上和我的不一样以外，几乎没有多大的差别。”

1687年以前，牛顿虽然没有发表过他的微积分论文，但是从1665年开始，他把自己的研究结果陆续通知了朋友，特别在1669年，他把关于微积分的第一篇重要著作《运用无限多项方程的分析学》交给巴罗，巴罗又把它交给约翰·柯林斯登记备案。柯林斯是奥登堡和皇家学会的数学顾问，他把牛顿的论文印发给皇家学会会员，请他们评审。所以，牛顿的论文实质上是公开发表了；莱布尼兹后来也看到过这篇文章，虽然它的正式发表要拖到1711年。那时候，莱布尼兹的微积分已经在伯努利兄弟的合作下在欧洲流行起来

了。英国人感到十分不满。1712 年，英国皇家学会在一份鉴定中公开指责莱布尼兹剽窃了牛顿的流数法。莱布尼兹得悉以后大为恼火。大陆上他的追随者也群起反击。他们不清楚牛顿的流数法，却了解莱布尼兹的微积分。历史上一场旷日持久的优先权的争论开始了。这使得已经被发霉的贵族家史忙得头昏脑胀的莱布尼兹更加烦躁起来。

1714 年，莱布尼兹写了《微分学的历史和起源》，一方面记述他自己思想的发展，另一方面也是回答英国人的攻击。在书中莱布尼兹特别强调了自己的微积分的独特性。后来，他又利用自己主编的《教师学报》用第三人称为自己辩护：

“在莱布尼兹建立这种新运算的专用观念以前，它肯定没有进入任何人的心灵。”

应该说，像微积分这样伟大的创造，不是一两个人的功绩。一部微积分的发展史是震撼人心的智力奋斗的结晶。这场斗争至少可以追溯到 2500 年以前。从芝诺[①]的悖论，欧多克斯的穷竭法一直到笛卡儿、费马的坐标几何，帕斯卡、巴罗的特征三角形，每一步都是微积分发展的重要阶梯。牛顿和莱布尼兹在先驱者们工作的基础上首先看出微分和积分运算的互逆性，建立了微积分的基本定理，并且为微积分的运算建立一套完整的法则，这无疑是微积分发展中决定性的一步，理应受到人们的缅怀和赞颂。但是，微积分的历史并没有结束。微积分的基础还相当混乱，它的应用还有待开发。因此，确切地说，不是谁创造了微积分，而是他在微积分的发展中作出了什么样的贡献。

同时，我们不应该忽视时代的条件。17 世纪的欧洲，度过了黑

---

① 芝诺（前 459-前 430）是希腊哲学家、数学家。芝诺的悖论揭示了离散与连续的关系。他的悖论之一是有关希腊神话中的英雄阿喀琉斯和乌龟赛跑的题目。假设阿喀琉斯的跑步速度是乌龟的 10 倍，而乌龟先起跑 10 码，在阿喀琉斯跑完这 10 码距离时，乌龟已向前移动了 1 码，而当阿喀琉斯再向前跑这 1 码时，乌龟又已走了 1 码的 1/10，以此类推。由此得出结论，阿喀琉斯永远不能赶上乌龟。

暗的中世纪，步入文艺复兴后期。社会生产获得相当的发展。由于商业扩展和航海事业日益发达，随着而来的是原料和市场的激烈争夺和连续不断的海上战争。要迅速而精确地确定海上船只的位置，就需要更准确的天文学知识。设计制造天文观测所必需的强大的望远镜就成为当时一项重要的科学研究。其中透镜的设计直接吸引了包括牛顿、费马和笛卡儿在内的许多大科学家的注意。但是，在设计光线通路的时候，根据反射定律，需要知道曲线上任意一点的切线。这正是研究切线问题的强大诱因。同时，随着生产的发展，航海业、采矿业和钟表业中精巧的器械逐渐增多。它要求设计者具有更充分的力学知识；不但要知道物体的平均速度，还要知道它的瞬时速度。这同样和曲线的切线问题密切相关。因此，迫切的社会需要可以部分地说明，为什么微积分发明在17世纪而不是更早。

但是，追求功名的心理蒙住了一些人的眼睛。争论愈演愈烈。甚至莱布尼兹和牛顿的先后去世也不能阻止争论的发展。争论造成了巨大的损失。英国人拒绝大陆流行的记号合理、使用方便的莱布尼兹的微积分，厮守着牛顿的古董，致使英国数学的发展大大落后于海峡彼岸，在下个世纪分析数学的蓬勃发展中没有能作出更大的贡献。

失意的晚境

作为法学教授，莱布尼兹为新兴的资产阶级宣传法的思想，首创国际法，为人类的进步作出贡献。

作为哲学家，莱布尼兹是伟大的德国古典哲学的先驱者，客观唯心主义的代表人物。他的“单子学说”含有辩证法的因素，至今影响着科学家的创新活动。他的哲学著作是哲学史上最优秀的作品之一。

作为科学界的领导人，莱布尼兹积极筹建新的科学研究机构。他创建柏林科学院并且担任第一任院长。这个科学院是世界上几个

最重要的科学组织之一。他为俄国彼得大帝建立彼得堡科学院的计划，在叶卡捷琳娜一世继位后得到实现。这个俄国科学的中心在世界范围有深远的影响。

作为数学家，莱布尼兹凭着罕见的才能、刻苦的钻研和无限的精力发明二进制，研制计算机，提出“普遍数学”和位置几何的思想，成为数理逻辑和组合拓扑的先驱者，特别是他独立于牛顿创建了微积分，在数学史册上享有崇高的地位。

莱布尼兹感兴趣的课题还有很多很多，他还想取得更丰硕的成果。可是，“人到中年日过午”，他深感时间和体力的不支。特别是早在不幸的优先权争论以前，他作为不伦瑞克-吕讷堡公国（也称汉诺威公国）的外交官、不伦瑞克家族图书馆管理人和历史学家，为不伦瑞克家族编修家史的任务越来越重。他受公爵的驱使，从1687年到1690年跑遍了整个德国，跑遍奥地利和意大利的许多地方。莱布尼兹当然不喜欢这种无聊的差使，不过，他太喜欢金钱了。他喜欢贵族的赏赐和俸禄；只有一回例外。在意大利期间，莱布尼兹访问罗马的时候，教皇邀请他出任梵蒂冈图书馆馆长。不过有一个条件，他必须先成为罗马天主教徒。他婉拒了教皇的盛情。因为他曾经致力于使基督教派和天主教派重归于好，因此不想卷入他们矛盾的漩涡。

41个学术领域的研究和一眼望不到头的旅途生活耗尽了他的精力。莱布尼兹老了。他老态龙钟，疾病缠身，被争论折磨得痛苦不堪。他被辞退了。

1714年4月暮春的一个傍晚，一辆马车载着一位疲惫的老者缓慢驶进不伦瑞克庄园。他就是莱布尼兹。不久，有消息说，他的东家汉诺威选侯乔治·路易即乔治一世，“诚实的木头人”，已经收拾好行装，带上鼻烟，动身前往英国继承王位去了。莱布尼兹对名利虚荣的爱慕之心又油然而生。没有比跟随乔治去伦敦更使莱布尼兹高兴的了，虽然由于他和牛顿的分歧，在皇家学会和英国的其他地方，有许多人对他怀有深刻的敌意。但是，年迈力衰的莱布尼兹在

乔治的心目中早已经没有地位。他简单地命令莱布尼兹待在汉诺威图书馆里，和不伦瑞克家族的家谱共度晚年。

失意的晚境对当年活跃在官场上的莱布尼兹无疑是一个不大不小的讽刺。他不禁经常想起自己年轻时候关于“普遍数学”的理想。他感到遗憾。为了王公贵族的权益，他引经据典，奔走呼号，耽误了对理想的追求。虽然他仍然相信，只要再年轻几岁，或者有几个称职的青年助手，他还能完成这项工作，但是他不无悲哀地看到，这些工作在他有生之年已经不能实现了。

1716年11月14日，终身未娶的莱布尼兹无声无息地在汉诺威去世。墓地的小松树在寒风中瑟缩。四周是静悄悄的一片。和牛顿万众瞩目的隆重国葬相反，没有送葬的行列，没有墓地演说，只有莱布尼兹的秘书和几个扛大锹的掘墓工人，听着坚实的土块撞击棺木的单调声响在空中回荡。

但是，莱布尼兹的精神并没有消失。随着时间的推移，这位历史巨人的影响有增无已。



欧　拉

(1707—1783)

读读欧拉，读读欧拉，他是我们大家的老师。

——拉普拉斯

英雄世纪的数学英雄

如果说17世纪由于创造了2000多年来梦寐以求的微积分而被誉为天才的世纪，那么18世纪由于数学家们把微积分大大向前推进，并且在各个科学技术领域取得辉煌胜利，而成为英雄的世纪。18世纪数学英雄的最高代表就是列昂纳德·欧拉。牛顿、莱布尼兹建立的微积分，为18世纪数学家所掌握，向数学、物理、天文和各个科学技术领域开拓，取得前所未有的进步。这场浩浩荡荡数学征战的旗手欧拉，以他非凡的聪明才智、勤奋劳动和惊人毅力，把微积分发展为拥有众多分支的分析数学。这种广义的数学分析实际上包括了对所有运动变化的定量研究。他在几何、代数上数量庞大的发明创造，导致一些全新的数学分支的诞生。欧拉为促进数学空前蓬勃的发展，耗尽了毕生精力：先是献出他的双目，最终是他的生命。他为人类文明建立了不朽的功勋。

和煦的阳光透过明亮的玻璃窗，照进四壁放满书籍的书房。一位头发略呈斑白的学者俯身在靠窗的书桌上挥笔疾书。他左手抱着一个两岁的幼儿坐在他的膝上。桌子对面的小伊琳娜在给玩具娃娃穿衣裳。孩子们的拍手声和欢笑声从过道传过来——阿尔伯特正领

着弟弟妹妹们拉着一只布狗熊在地上打滚；小狗查利高兴地摇着尾巴在人群里窜来窜去。这是1747年4月的一天，列昂纳德·欧拉正在写他的著名论文：《无穷小分析引论》。

有人说，欧拉计算起来毫不费力，就像人在呼吸，鹰在翱翔；也有人说，欧拉写他的高超论文，恰如文笔流畅的作家给他至亲好友写信那样轻松自如；甚至有人说，欧拉能够在妻子第一次和第二次催他吃午饭的不到半小时的间隙里完成一篇论文。且不说这些说法是不是言过其实，从这里我们多少可以看出他那无与伦比的数学才华。

欧拉是历史上最多产的数学家。多产的法国数学家柯西的全集有26卷；德国数学家高斯的全集有12卷；而欧拉一生创作了886篇论著，他的全集有74卷之多。如果考虑到他生命的最后17年双目已经完全失明，就更令人惊叹不止了。人们可以在所有数学分支中见到他的光辉名字：欧拉公式，欧拉函数，欧拉方程，欧拉多项式，欧拉常数，欧拉积分，欧拉线，……即使在初等数学中也不例外，那里的不少重要概念和定理正是这位大师的杰作。发现立体几何中有名的欧拉定理和建立起今天三角学科学体系的就是这位大名鼎鼎的欧拉。不仅如此，在数学以外的许多学科还有一大串以他命名的专门术语来纪念他的卓越贡献，欧拉运动学方程，欧拉流体动力学方程，欧拉力，欧拉角，欧拉坐标，欧拉相关，等等。他那博大精深的学识和无穷无尽的创造精力永远是人们敬慕的对象。1909年，瑞士自然科学协会，在全世界许多学术团体和个人资助下着手搜集和出版欧拉的佚文的时候，指出：欧拉不仅属于瑞士，而且属于全世界。的确，被誉为“数学家的英雄”的列昂纳德·欧拉不愧为瑞士奉献于世界的最伟大科学家。

不解之缘

在瑞士北部连绵起伏的丛山中，同德、法两国交界的地方有一

颗晶莹的明珠——巴塞尔城。清澈的莱茵河从她身旁轻轻流过，好似一条丝带把城市装扮得妩媚动人。巴塞尔是瑞士的学术中心，历史上产生过许多大科学家的声名显赫的伯努利家族就居住在这里。1707 年 4 月 15 日，城市居民册上又增添一个新居民，保罗·欧拉和玛格丽特·布鲁克的儿子列昂纳德·欧拉降生了。第二年，小欧拉随双亲迁到附近的雷欣村，父亲就在村里当加尔文教的牧师。其实，保罗本人对数学颇为在行，他曾经是数学家雅各布·伯努利的高材生。可是，他自己不想从事数学工作不说，还要儿子长大以后和自己一样，在乡村教堂里当牧师。做父亲的只指望儿子继承自己的事业，不想把孩子培养成为科学家，这类事例在科学史上屡见不鲜。高斯的父亲要儿子当花匠；维尔斯特拉斯的父亲要儿子当文官；黎曼的父亲想让儿子当牧师。保罗这样打算倒也情有可原，因为当牧师毕竟比当数学家容易，何况它的收入要优厚得多呢！因此，保罗对儿子从小就灌输极严格的宗教教育。什么早祷告，晚祷告，每天必做，甚至在每餐饭以前，还要讲一通主耶稣的道理。幸好他有个“毛病”，逢到高兴的时候，他会抛开天国和上帝，眉飞色舞地讲起人世间迷人的自然数和三角形来。凭着他向善男信女布道的时候练就的好口才，保罗把数学讲得绘声绘色，妙趣横生，完全迷住了小欧拉。热爱数学的种子就这样默默地埋在孩子的心田。

中学一毕业，欧拉顺从父亲的意愿来到巴塞尔大学学神学和希伯来语。不过他心里明白，自己真正喜爱的是什么。这时保罗当年的老师雅各布·伯努利已经去世，由他弟弟约翰·伯努利接替担任数学讲座教授。约翰本来是位医术高明的医生，后来受他哥哥的影响改攻数学。他 28 岁出任荷兰格罗宁根大学数学教授，并且多次夺得法国科学院颁发的研究奖，成为驰名欧洲的大数学家。数学界至今流传着一段有关约翰的轶事。在第五章中提到过，为微积分发明的优先权，约翰站在莱布尼兹一边，同牛顿争论得相当激烈。但是，牛顿在约翰的心目中仍然无可争辩地享有崇高的地位。年轻的约翰有一次在英国旅行，遇到一个外国人。这个人身体微胖，长发披肩，

显然受到周围人们的极大尊敬。约翰不避嫌疑，上前谦逊地介绍自己："我是约翰·伯努利。""我，"那人冷冷地回答，"是伊萨克·牛顿。"约翰把这次会见看做是自己一生中所接受的最高贵的礼物。

这时约翰虽然年过半百，但是精神矍铄，讲起课来旁征博引，生动而富有感情。每逢他上课，教室里总是济济一堂，座无虚席。欧拉也去听约翰的课。坐在教室最前排的欧拉特别惹人注目。在他高高的额头下闪烁着一对天真无邪的大眼睛。不过说他是个孩子可能更确切，因为他的年纪最多不过十二三岁，个子比一般学生足足矮一头。大学生们都当他是小弟弟，没有把他放在眼里。可是，人不可以貌相。有一次，约翰在讲课的时候无意中提到当时数学家们还没有解决的一个大难题。谁知下课铃声一响，欧拉不声不响交给他一份答案。约翰看着看着，几乎不敢相信自己的眼睛。是的，欧拉的解答还称不上是真正完备的，但是它构思的精巧和大胆使约翰清楚地意识到，站在自己面前的这个瘦小的孩子，将是未来的数学巨人。这个意外的发现使约翰大为兴奋。他当即决定每星期在家单独为欧拉授课一次。有这样的好机会，欧拉连做梦也没有想到，心里真有说不出的高兴。果然，在名师的精心指导下，欧拉的数学突飞猛进。他的勤奋和才能也深深吸引约翰的儿子丹尼尔·伯努利(1700-1783)，他们从此成为终身好友。

欧拉17岁获硕士学位。父亲要他放弃数学，把全副精力放在神学上。欧拉虽然笃信上帝，可是要去做神职人员，他打心眼里不乐意。不过，他是个孝顺的儿子，不愿公然违抗父亲的意志。正在感到左右为难，伯努利父子闻讯赶来为他说情。

"亲爱的神甫，您知道我遇到过不少才气洋溢的青年，但是要和您的儿子相比，他们都相形见绌。假如我的眼力不错，他无疑是瑞士未来最了不起的数学家。"约翰压抑着内心的激动接着说，"为了数学，为了孩子，我请求您重新考虑您的决定。"

保罗不是铁石心肠。他理解约翰也理解儿子的心情。深孚众望的约翰教授的一席话使保罗改变初衷，虽然这将给家里的生活带来

困难。从此，欧拉再也不用等到父亲熟睡以后才偷偷起床来做他的计算，也不用在数学书外面套一张圣经的封皮来逃避父亲的注意。他像放出樊笼的苍鹰冲向自由的蓝天，又像饿虎扑向面前的猎物。从古希腊的经典著作到牛顿的《自然哲学的数学原理》，他巴不得一古脑儿把它们嚼碎吞下。好在他有惊人的理解和消化能力，这些丰富的知识再好不过地促使他飞速成长。

日历翻到了 1727 年。春风吹绿了巴塞尔的大地。年轻的欧拉满怀创造的激情，跃跃欲试。当时欧洲的科学院有个通行的做法，它们把各国政府或有关部门提出的科研项目，设置奖金公开征求解答。在这些题目中有相当一部分同航海有关，因为随着航运事业的发展和连续不断的海上战争，各国政府愈来愈关注海洋的控制。那一年，法国科学院提出的题目是：关于船的立桅。巴黎奖金是一项崇高的荣誉，对数学家来说，能赢得一次这样的荣誉就足慰平生了。欧拉决定利用这次机会考验一下自己的能力。从某种意义上说，欧拉的处女作是他全部工作的缩影。它既显示出欧拉的力量，也暴露了他的弱点。欧拉的力量在于分析。他是分析学精妙绝伦的大师，又是顶呱呱的方法发明家和运算的巨匠。分析的武器一到他的手中真可谓坚无不摧，攻无不克。欧拉的弱点，如果有的话，就在于有的地方和实践脱节。倘若我们记得瑞士根本不存在海军，那么对他的弱点也就不会过分惊奇。他在瑞士的湖泊里只见过不多的几艘划桨的小船，还没有见过真正的海船呢！评选结果，欧拉的论文得到很高的评价，但是没有获奖。不过这算不了什么。欧拉从这次工作中得到有益的锻炼。后来他以 12 次获得这类奖金来补偿这次失利。

同年，在朋友们的怂恿下，欧拉向巴塞尔大学申请教授职位。可惜他资历尚浅，虽然经约翰·伯努利极力推荐，还是遭到校方拒绝。接连的挫折没有使欧拉气馁，反而激起他更加发愤地学习。这时丹尼尔·伯努利正在彼得堡大学任数学教授，他一口答应为欧拉在科学院谋个差使。想到不久将去彼得堡同丹尼尔在一起，欧拉满心喜悦。有一次丹尼尔来信提到，彼得堡科学院可能要开设医学部。

听到这个消息，欧拉开始热心地学习生理学，还去听医学讲座。尽管这样，欧拉经过这些年来对数学的潜心研究，已经和数学结下不解之缘。无论做什么事情，即使在欣赏诗篇，他都要用自己的数学天才去试探一番。欧拉十分喜爱的罗马大诗人维吉尔的史诗《埃涅阿斯纪》中有这样一句："锚抛下了，前进的大船停下了来。"读到这里，恐怕谁也不会想到它和数学有什么联系。可是，欧拉在这里禁不住要对船体在这种状态的运动来一番详细的计算。研究医学同样不能使他和数学分离。耳朵的生理学激起他对声音的传播发生兴趣。他利用数学来描述和研究声波的运动，写下一系列声学方面的重要论文，使这个领域成为数学物理学的一个重要分支。欧拉早期的工作就像一棵粗壮的大树，藤攀枝绕，盘根错节，繁茂地向四面八方生长出千姿百态的枝杈。

在彼得堡

丹尼尔办事利索。过不多久，欧拉接到去彼得堡工作的来信，职务是科学院医学部的助理。他兴高采烈地打点起行李匆匆启程。套马大口喷着水气，扬蹄飞奔。欧拉眺望着一闪而过的茅舍、田野，憧憬着未来，充满着希望。他感到浑身有使不完的力量，恨不得插翅飞到彼得堡，立即投入工作。

可是一到彼得堡，前来迎接的丹尼尔愁容满面。他让欧拉在家好好休息，压根儿不提去医学部就职的事。原来，在欧拉急匆匆日夜兼程地赶路的时候，在位刚刚两年的俄国女皇叶卡捷琳娜一世猝然去世。权力落入未成年的沙皇彼得二世手中。幼稚的小沙皇根本不懂科学，只把科学院当成多余的奢侈品。他打算解散科学院，把外籍科学家统统打发回国。丹尼尔四处奔走求告，结果一无所获。欧拉只得闷坐在家里一筹莫展。这时候，俄国海军部正在招考海军军官。为了生活，他决定去碰碰运气。半个月以后，欧拉早早来到涅夫斯基大街看结果。平日冷冷清清的海军部大楼门前，今日熙熙

攘攘，人头济济。有的喜形于色，有的故作镇静。欧拉不安地在远处向贴榜处瞧去，心头不由一震。榜上的名字虽然写得密密麻麻，但是他一眼就看出，第一个名字不是别人，正是列昂纳德·欧拉！他揉揉眼睛凑往近处再一瞧，果然不错。不知是身体不适还是今天彼得堡的寒风格外凛冽，他感到好似背上浇了一桶冷水，浑身发凉。他裹紧围巾，翻起大衣领子，被人群推挤着恍恍惚惚向外走。录取无疑可以使他摆脱生活的困境，但是成为海军中尉毕竟不是他的理想。看来已经没有两全的妙策，只有听从命运的安排去海军部报到。正在这时，一辆马车飞快赶到，满头大汗的丹尼尔跳下车来一把将欧拉抱住。事情有了意想不到的转机。经过再三交涉，沙皇政府终于同意欧拉去科学院工作。欧拉简直不敢相信这个“天上掉下来”的喜讯。他握住丹尼尔的双手久久说不出一句话来，眼眶里闪烁着喜悦的泪花。

但是要高兴还为时过早。新沙皇为了镇压人民的不满和反抗，在彼得堡布满告密的奸细。流放和处决的消息不时传来。数学部有位同事因为传抄一首无名作者的无题诗，被遣送到西伯利亚。整个俄罗斯笼罩在恐怖的乌云之下。欧拉除了埋头工作，根本过不上正常的社交生活。1730 年，小沙皇夭折，由彼得大帝的侄女安娜·伊凡诺夫娜即安娜女皇即位。科学院的处境有了相当改善。可是整个俄国在安娜的情夫恩斯特比龙的统治下，成为俄国历史上最恐怖的时期之一。欧拉只有用紧张的思考和不停的计算来摆脱他对血腥统治的恐惧和厌恶。忍受不了令人窒息的气氛，丹尼尔于 1733 年回到自由的瑞士。欧拉很快晋升为科学院数学部的负责人。想到自己将在俄国长期居住，欧拉决定结婚。新娘柯黛玲是画家格赛尔的千金，温柔贤淑，持家有方。婚后家庭生活恩爱美满。然而政治气候更加恶化。欧拉想步丹尼尔后尘回瑞士工作。无奈小生命一个接着一个地出世，使离开的希望化为泡影。欧拉夫妇先后生育的子女达 13 个之多，堪与欧拉在科学上的多产相媲美。不过孩子也有好处。天伦之乐洗净他一天工作的疲劳，也使他暂时忘却彼得堡街道上的血雨

腥风。欧拉是位慈祥而称职的父亲，他为子女的教育付出大量心血。每到晚上，孩子们围坐一圈，由欧拉亲自布置和检查他们的作业，解答他们的问题。他还编了许多数学趣题启发他们的思考。下面就是其中的一个：

“父亲临终时立下遗嘱，按下述方式分配遗产：老大分得100克朗和剩下的1/10；老二分得200克朗和剩下的1/10；老三分得300克朗和剩下的1/10；老四分得400克朗和剩下的1/10；依此类推分给其余的孩子。最后发现所有孩子分得的遗产相等。问遗产总数、孩子数和每个孩子分到的遗产是多少?”

一道初等代数的简单应用题，经过欧拉精心编写，大大激发起孩子们的学习兴趣。但是，最受孩子们欢迎的还是他那讲不完的故事和诗朗诵；而如果他得闲能和孩子们在一起唱歌游戏，消磨一个愉快的晚上，更使他们久久难忘。孩子们的嬉笑声和琅琅读书声时时从窗户飘出来，怪不得许多过路的行人以为，这里一定开办着一个很好的幼儿园呢！

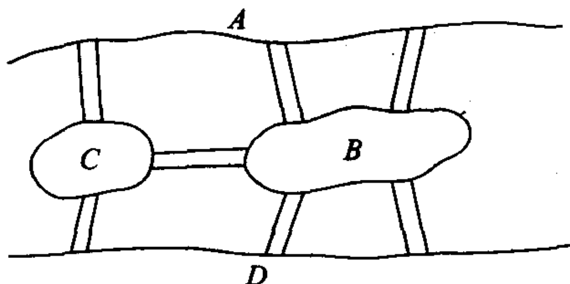
欧拉是那种极为罕见的数学家，他能够在任何地方、任何条件下工作，一切外界的干扰都不能打断他聚精会神的思考。就在子女绕膝、笑闹之声不绝的环境里，在沙皇统治恐怖的浓重阴影下，一篇篇论文源源不断地从欧拉的手中流出。他用拉丁文写的论文深入浅出，雅俗共赏，字句极少改动。尤其是他创造了现代数学的语言，更使他的作品受到广泛欢迎。今天我们常用的数学符号，像用Σ表示求和，用i表示$\sqrt{-1}$，用$f(x)$作为函数的记号，用sin、cos、tan表示正弦、余弦和正切，以至用a、b、c表示三角形的边，用A、B、C表示它们的对角，等等，正是欧拉所首创的。文章一写完，欧拉把它放在早已经叠得高高的一堆手稿上等待印刷。科学院学报需要材料的时候，只要派个印刷工人径自从那上面来取就是。这样，常常把先写好的手稿压在下面。所以，在欧拉的论文集里常有后写作的反而先发表那种怪现象。

柯尼斯堡七桥

1736年，姗姗来迟的夏天又匆匆离去。转眼间，欧拉在彼得堡已经度过10个春秋。身为科学院数学部的负责人，摆在他面前的研究课题有长长一串。眼下他正在修改一篇《论力学》的重要论文，准备付印。他为力学所作的，正是100年以前笛卡儿为几何所作的。他把微积分的全部威力第一次用来对付力学，使力学摆脱传统所采用的几何的综合论证方法的束缚而成为分析的科学，从而开创这门基本科学的现代新纪元。

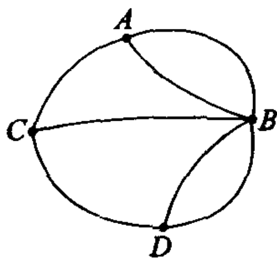
吃罢午饭，欧拉点燃烟斗，拿起刚送到的信件阅读起来。这是难得的休息。亲友们生活上的问候和同行们在学术上的热烈探讨，犹如一道金色的阳光透过彼得堡灰蒙蒙的天空投射到他的心房，使他感到温暖。从欧洲各地向他求教的来信每天都有一大堆。今天有一封从柯尼斯堡的来信特别引起欧拉的兴趣。

18世纪东普鲁士的柯尼斯堡，就是今天俄罗斯的加里宁格勒。美丽的普雷格尔河水轻盈地流经这座僻静的小镇。河上旖旎的风光吸引小镇的居民来这里散步休息、野餐、垂钓。普雷格尔河上有两个小岛，从河的两岸分别有三座桥和它们相连；另外又有一座桥把两个小岛连接起来。时间一久，有位爱思考的居民提出来一个问题，一个散步的人能不能一次走遍七座桥，而且每座桥只能走一次？这个问题谁也回答不了。有人说可以，可是走来走去，始终没有走通；有人说不行，可惜又说不出令人信服的理由。这个



不大不小的问题竟一下子难住全镇居民和外地游客。幸好有位小学老师出来解围，他想出一个好主意：为什么不写封信去请教在彼得堡鼎鼎大名的欧拉呢？

欧拉是出名的“好好先生”，他对别人的请求总是有求必应。无论是应邀撰写初等数学的教科书还是绘制俄国地图，无论是有关度量衡制度的改革还是设计一种检验天平的实用方法，甚至连中小学生有解不出的“难题”来求教，也总能使他们如愿以偿。只要需要，不论它多么平凡，多么琐碎，他总会毫不犹豫地去完成。他从来不考虑这种“杂事”是否会影响自己的研究，降低自己的“身份”。其实，欧拉不仅仅把它当作自己应尽的责任，他对它们确实怀有浓厚的兴趣。你看，像柯尼斯堡七桥这类问题在数学上还没有人处理过。它显然不是我们所熟悉的代数问题，因为它不是研究数量的大小。它和平面几何也不相同。平面几何里的图形不是直线就是圆，是讨论它们的角度大小和线段长短。可是在柯尼斯堡七桥问题里，桥的准确位置无关紧要，陆地的大小和形状也不用考虑。重要的是考虑一共有几块陆地、几座桥以及它们的连接情况。根据这个特点，欧拉先把柯尼斯堡七桥画成一个线条图，在他的图形里，小岛和河岸变成了点，桥成了连接这些点的线。这样，问题就成为：从图上某一点开始，中间任何一条线不得画两遍，铅笔不准离开纸，能不能把这张图一笔画出来？经过一番思索，欧拉终于找到一个彻底而漂亮的答案。说它彻底，因为它给出了能否一笔画出一张“河-桥”图的明确条件；说它漂亮，因为它的条件非常简单，对于任何一张“河-桥”图，只要一两分钟就可以作出判断。



七桥问题的圆满解决使柯尼斯堡人心满意足。但是对欧拉来说，这仅仅是个开端。发现一块矿石意味着可能有巨大的宝藏。经过精

心的开掘，欧拉果然发现一个只要考虑位置关系和性质的全新的数学领域——拓扑学①，建立了网络的概念并且推导出拓扑学中非常有价值的关系式。拓扑学在近代有重大发展，它渗透到数学的各个分支，获得了广泛应用。比如，安排运输路线或邮递路线就得考虑这样的问题：怎样把货物或邮件送到指定地点而又不走回头路。

不嫌弃平凡的工作并且善于从中发现不平凡的内容，是欧拉难能可贵的品质。在欧拉琳琅满目、美不胜收的创作宝库里，珍藏着他为柯尼斯堡七桥、国际象棋中骑士的跳步等一类数学游戏所写的大量光彩照人的作品。

晴天霹雳

正当这位从巴塞尔来的年轻数学家以神话般的速度在数学的各个领域里一篇接一篇地发表独具匠心的论文的时候，晴天一声霹雳，欧拉的右眼瞎了！

天文学上彗星轨道的计算历来是数理天文学中的一大难题，因为它牵涉到两个以上的星体。没有计算机帮助，要想得到比较精确的结果，即使是一位极有才能的数学家，一般也要花好几个月的辛勤劳动。为了吸引科学家们的兴趣，1739 年，法国科学院特别为这一课题设置巨额奖金，征求解答。欧拉决定在这个领域里施展一下计算才能。他对通常采用的方法作了一系列重大改进。尽管这样，计算仍是困难重重。可是一旦开始工作，要欧拉中途停顿简直不可能。他在书房里着迷似地干了起来，忘了吃饭和休息。饿了啃几口面包，困了就靠在椅背上迷糊一会儿。柯黛玲看着丈夫这样不顾一切地工作，只有干着急，爱莫能助。虽说进展神速，等他算出彗星的轨道，时光已经不知不觉地过去 3 天。晨曦透过窗帘悄悄报告新的工作日的来临。欧拉的眼睛布满血丝，头昏沉沉的，身子疲惫不

① 拓扑学是研究图形在双方单值连续变换下不变性质的几何学。

堪。他轻轻阖上刚写好的论文，随手推开窗户，张开双臂伸了个懒腰，突然眼前发黑，一头栽倒在地！欧拉在床上整整躺了一个星期。病后，他的右目完全失明了。

欧拉作为计算方法的大师，无疑从来没有人超过他，甚至连比较接近他的人也不容易找到。然而他的每项成就远不像人们所想像的那样轻而易举，他们以为，欧拉写一篇论文就像魔术师从手帕里变出一只鸽子一样，只消一眨眼的功夫。这是严重的误解。虽然历史上对于这次计算是不是欧拉右目失明的直接原因存在不同意见，但是在这一点上没有什么争论：欧拉作品里的字字句句，无不浸透着他的滴滴心血。欧拉的天资聪敏过人，可是历史上具有这样天赋的人才何止欧拉一个！而像欧拉这样对数学执著追求和不懈努力的人却是绝无仅有的。他和数学已经融为一体。形形色色的数学问题不用说，即使是粗看起来同数学毫不相干的问题，他也要从数学的角度一一加以分析推敲。欧拉的这种“爱好”一直保持到他生命的最后一刻。经过长年累月的锻炼，他的才思磨砺得超乎寻常的敏锐，解决问题的能力和速度也就远远超过一般人的想像了。

在 柏 林

1740 年，普鲁士国王腓特烈大帝在柏林登基。腓特烈身材矮小，可是野心勃勃。他自诩为“欧洲最伟大的国王”，要“励精图治”，使普鲁士在各方面都雄踞欧洲之首。柏林科学院的现状使他失望，由于没有称职的领导人，科学院死气沉沉，最多只能在欧洲充当二三流角色。彼得堡科学院却是另一番景象。在欧拉领导下，那里人才辈出，成果累累，呈现一派蓬蓬勃勃的生气。因此当腓特烈打听到欧拉在俄国生活苦闷的消息，大喜过望。他立刻向欧拉发出“盛情”邀请，来挖彼得堡科学院的墙脚。

腓特烈的王宫金碧辉煌。仆仆风尘的欧拉一身便服前来谒见。腓特烈见到新来的数学家穿着皱巴巴的西服，围一条发黄的丝围巾，

连礼帽也没有戴，心中很不高兴。这无异是对“最伟大的国王”不可容忍的怠慢。他爱理不理地敷衍两句就拂袖而去。和国王貌合神离的皇后倒是十分殷勤。她看到欧拉的打扮和风度与众不同，想同他好好聊聊。可是，欧拉在俄国几乎与世隔绝地沉默了10多年，他担心皇后连珠炮式的问话是不是别有用心。

“您为什么不愿和我谈话?”皇后不解地问。

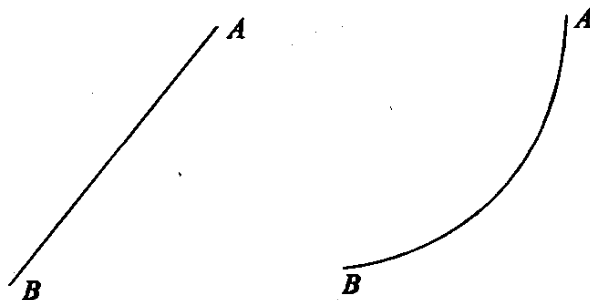
“夫人”欧拉回答说，“我来自一个这样的国家，谁多讲话，谁就要上绞架。”

欧拉没有把宫廷不愉快的谈话放在心上。他的心早被一大堆数学问题所占领，已经容不下其他的琐事。这些日子他一直在考虑，怎样对17世纪最伟大的发明——微积分作系统的介绍。因为自从牛顿-莱布尼兹建立微积分以来，它在物理学、天文学、航海学和工程学等广大领域里已经显示出无比威力，并且由此产生一系列的新的分支，如微分方程、无穷级数、变分法、函数论等，迅速形成一个数学中最庞大、最重要的分支——数学分析。数学家热衷于分析这些新分支的发展。但是要做到这一步，首先必须扩展微积分本身。牛顿-莱布尼兹创造了微积分基本方法，可是从它的逻辑基础到应用还有大量问题有待解决，而为了让更多的人掌握分析的武器，还需要扫除从初等代数过渡到微积分的重重障碍。欧拉决心肩负起这项艰巨而有意义的任务；在当时健在的数学家中，的确没有谁比他更胜任这项工作的了。不久，遐迩闻名的《无穷小分析引论》和《微分学原理》两部杰作先后问世。连同他后来在彼得堡出版的《积分学原理》，它们都是分析中里程碑式的经典著作，为鼓舞和造就一批批有才华的青年成为伟大的数学家建立了不朽的业绩。先有拉格朗日、拉普拉斯，后有高斯、柯西、黎曼等，这些大数学家都是在欧拉著作的指引下迈进庄严的数学宫殿的。甚至今天大学课程里的某些内容，实际上仍和200多年前欧拉留下来的一样。欧拉在分析上所表现的高深造诣和超凡技巧，立刻博得“分析学的化身”的美誉。

欧拉关于数论的大部分工作也是在柏林完成的。17 世纪大数学家费马生前提出的大量重要而有趣的命题，到今天为止，世界上还没有人能把它们全部证明出来，惟有欧拉证明了其中的大部分。不仅如此，许多命题他还进一步加以引申推广。特别是在 1745 年前后，他发现了 18 世纪数论中最重要的定理——二次互反律。这是一项极其了不起的成就。后来的数学家们为探求它的含义引申出大量极有意义的成果。

但是，欧拉在柏林期间最杰出的成就是关于变分法的工作。

在儿童游乐场里，你一定见到过孩子们喜爱的滑梯吧。顺着后面的梯子一级级爬到顶部，身子往滑槽里一坐，哧溜一下就滑到了地面。可是有谁想过，从顶部 A 到着地处 B，滑梯做成什么样才最省时间呢？有人可能会说，这很简单，把滑梯做成直的就行啦，因为这样从 A 到 B 的距离最短（如下图左）。直线距离最短是不错；可是，距离最短并不等于时间最省，因为他还没有考虑到速度大小呢。要知道，直的滑梯下滑的速度是增加得比较慢的。那么，滑梯该做成什么形状才好呢？早在 1696 年 6 月号的《教师学报》上，欧拉的老师约翰·伯努利就把它提出来向其他数学家挑战。提出这个著名的“最速降线问题”（如下图右）比欧拉的出生整整早了 10 年。这一类极大极小问题还可以举出许多。它的萌芽可以追溯到希腊以前的时代。在古代，传说迦太基人建造城市的时候允许居民占有一天犁出一条沟所围成的土地。由于一个人在一天里犁沟的长度一般是确定的，所以对他来说，问题就是应该把沟犁成什么形状所



圈的面积才最大。

约翰-伯努利的难题在提出以后的第二年就由牛顿、莱布尼兹、雅各布·伯努利和约翰·伯努利本人先后给出了解答。可惜他们的工作只到这里为止。在约翰·伯努利的建议下，欧拉在1728年开始涉足这个困难的领域。他从研究曲面（主要是地球）上的测地线问题着手，就是连接曲面上（地球面上）的两点，什么样的曲线距离最短？欧拉很快找到了答案。不久，他把最速降线问题加以推广，并且考虑了摩擦和空气的阻力。接着，他又致力于寻找解决这类问题的更一般的方法。经过前后16年的不懈努力，终于获得成功。虽然他所采用的是分析和几何相结合的方法而不是纯分析的方法，论证十分复杂，但是最后的结果却同样简单而且优美，有广泛的应用。1744年，欧拉的《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》在柏林正式出版。这部杰作立刻使他被公认为当时最伟大的数学家。随着它的出版，变分法作为一个新的数学分支诞生了。

10年后，数学界又升起一颗灿烂的新星。年方19岁的拉格朗日受到欧拉方法的启发，开始研究变分法。欧拉得知以后，立即给予热情的鼓励。经过四年的努力，拉格朗日果然发现了解决这类问题的最佳方法。欧拉兴奋异常，他赶紧压下自己即将付印的有关著作，让拉格朗日的结果先发表。用欧拉的话说，“这样就不会剥夺你（指拉格朗日——引者注）所理应享有的全部光荣。”他知道私人信件里无论说得多动听，对年轻的拉格朗日毕竟帮助不大。因此在出版自己著作的时候，他着重声明，在拉格朗日提出这个方法以前，自己遇到了“不可克服的困难”。可以想像，作为一位在全世界享有崇高威望的大数学家，要在自己的著作中公开承认一位默默无闻的青年超过了自己，该需要何等的勇气和坦荡的襟怀！其实，这无须使欧拉感到难堪。牛顿不是说过吗，他之所以能看得比前人远些，只因为他是“站在巨人的肩上”罢了。在变分法方面，欧拉超过了他的老师约翰·伯努利；而今天，年轻的拉格朗日又走到欧拉的前头。“青出于蓝而胜于蓝”。科学的发展不是如同滔滔长江，

后浪拥着前浪，奔腾向前，永不停息吗？不久，由欧拉推荐，年仅23岁的拉格朗日被选为柏林科学院的外籍院士。欧拉的高尚品质赢得科学界的广泛尊敬。在他的晚年，当时欧洲所有的数学家都以自己是他的学生而感到自豪。

但遗憾的是，腓特烈邀请欧拉不是为了分析和数论，也不是为了变分法。腓特烈只是要欧拉为他的科学院装点门面和给他的侄女迪莎公主当私人教师。可怜的数学家不得不每天从宝贵的时间里挤出两三个小时花在这位骄傲的公主身上。欧拉不甘心让公主独享美果。他把丰富多彩的授课内容用信的形式公开发表。他那优美流畅的文笔使人们吃惊地发现，欧拉的文学才能被大大地低估了。著名的《致德国公主的信》立刻用7种文字翻译出版，风靡一时。

这一切还不足以耗尽欧拉无穷无尽的创造精力。他还为普鲁士政府解决了诸如铸币、城市水道、运河、保险金和养老金制度等一系列重大的实际问题。特别是由于他的卓越领导，使濒临绝境的柏林科学院重获新生，一跃成为欧洲最有影响的科学院之一。

好像神奇的园丁，欧拉所到的地方无不繁花似锦，生意盎然！

无法容身

但是谁会想到，欧拉在柏林的生活甚至比在彼得堡更难受。说来也不奇怪，一群大臣贵族整天围着腓特烈转，令人作呕的歌功颂德和阿谀逢迎早已使他飘飘然。试想质朴的欧拉一不会吹牛，二不会拍马，在腓特烈国王面前不亢不卑，直言不讳，岂能不遭白眼？虽然腓特烈以科学保护人自居，可是他不懂数学，也不喜欢数学，更看不上“直愣愣”的欧拉。他甚至公然奚落欧拉是“独眼龙”！

欧拉不会机智地避开哲学问题的辩论，也使他自己吃了苦头。

欧拉的学识渊博，举世公认。他不仅在自然科学各部门，而且在文学、音乐、神学等许多方面都有极深的造诣。可是，欧拉在哲学上却是个门外汉。他以为哲学只是诡辩学，见仁见智，不值得下

功夫研究。当时腓特烈宫廷里有位红人，他就是18世纪多才多艺的法国大作家伏尔泰。这个人能言善辩，口若悬河，论战起来语言尖刻辛辣，毫不留情。他常常喜欢把单纯好奇的欧拉诱人哲学的迷宫，引得一班咬文嚼字的朝臣们在旁边挤眉弄眼，看热闹。结果可想而知，欧拉总是低头认输。在一片笑声中，欧拉自己也不由得温厚地笑起来。其实，欧拉只把辩论作为无伤大雅的消遣，倒不在乎它的胜负。他甚至颇为欣赏从伏尔泰那里招来的毫不容情的批评。然而腓特烈把辩论看得十分认真。书生气十足的欧拉使他失望。他要物色一位仪表堂堂、能应付各种场面的老练的哲学家来领导科学院和应酬他的宫廷。他决定邀请法国著名数学家、思想家达朗贝尔（1717-1783）来接替这个位子。达朗贝尔是位理想的人选。他对哲学深有研究，而且和欧拉在数学上关系有些冷淡。可是达朗贝尔不是这种人，可以让个人关系的好恶来左右自己学术上的判断。他直截了当地告诉腓特烈，想把任何人置于欧拉之上是痴人说梦。不想这个回答只是火上浇油。腓特烈恼羞成怒了！

实际上，欧拉和彼得堡科学院一直藕断丝连。即使在柏林科学院任职，彼得堡也照常支付他一部分薪金。同样，欧拉虽然身在柏林，仍为彼得堡寄去了上百篇论文，还不时对那里的事务提供咨询意见。1762年叶卡捷琳娜二世即位，俄国科学家的工作条件有了相当的改善。她热情邀请欧拉重返彼得堡工作。欧拉很清楚，自己仅剩的深受白内障折磨的左目绝对经不起彼得堡严寒的侵袭。不过他还是决定回去。柏林的气氛已经使他无法容忍。这位欧洲最有威望的数学家为腓特烈夜以继日地干了20多年，终于未能逃脱颠沛流离的命运。年近花甲的欧拉，拖着病体，偕同多病的柯黛玲和一大群子女，又一次餐风饮露，长途跋涉，来到冰雪覆盖、寒风怒号的彼得堡。

重返彼得堡

欧拉在彼得堡受到异常隆重的欢迎。叶卡捷琳娜二世用王室成

员规格礼待这位大数学家。她专门为欧拉准备好一幢雅致而舒适的住宅，配备了8名仆役，还委派一名御用厨师来管理膳食。

欧拉迫不及待地投身工作。可是好景不常。北方刺骨的严寒和紧张劳累的工作使他左眼的视力迅速恶化。这一消息引起拉格朗日、达朗贝尔等欧洲著名数学家的惊恐不安。他们纷纷向欧拉表示同情和慰问，希望他好好休息。早日恢复健康。按理说欧拉是该放下工作，安心休养一番了。他为数学已经足足奋斗30多年，获得了举世瞩目的成就；他的著作远远超过历史上任何一个最多产的数学家；特别是他为此已经献出自己宝贵的右目。现在，如果再不注意保养，他仅存的左目眼看又要失明。失明意味着什么，欧拉比谁都清楚。双目失明将使他成为生活上不能自理的残废，将再也看不见使他神往的计算公式和几何图形，看不见亲人的脸庞和美好的世界，一句话，他将坠入黑暗的无底深渊！可是他同样清楚，工作就是他的生命。要是生活中失去了他自己钟爱的计算，那么活着还有什么意义呢？不错，失明可以剥夺他看书写字的能力，可是夺不走他超群绝伦的才华，更休想夺走他热爱数学和献身科学的决心！他平静地等候着失明的到来，但是决不向黑暗低头。他决心用加倍的努力，来回答命运对他的挑战。

在最后失明以前，欧拉习惯用石笔在一块大石板上进行演算。他双目失明以后，决定由自己口授，主要让大儿子阿尔伯特来笔录。从查阅资料到论文写作中所遇到的种种意想不到的不便和困难，他只有用延长工作时间来弥补。他的创作精力使年轻人自愧不如。从他口中吐出的一字一句，慢条斯理，绵绵不绝，好似一条抽不完的丝线。这根无形的丝线把年轻人紧紧捆住，累得他们腰酸背疼。大儿子支持不住了，就由大女儿接着记。这位双目失明的老人凭着超乎寻常的意志和毅力，再一次创造出令人瞠目结舌的奇迹。他的科学成果在失明以后不但没有减少，反而增加了！除了厚厚3卷《积分学原理》以及《船舶制造和结构全论》等重要著作外，他还用每年800页的惊人速度发表了近400篇具有独创性的研究论文。今天，

当我们手捧他的光辉论著，欣赏着那丝丝入扣的深刻分析和令人眼花缭乱的精巧计算，谁会相信它们的作者竟是一位双目失明的老人！



从他口中吐出的字句，好似抽不完的丝线

毫无疑问，这一切成就都和欧拉罕见的记忆能力密切相关。维吉尔的洋洋12大卷国民史诗《埃涅阿斯纪》，虽然他青年时代以来已经不再翻阅，仍能背诵如流。如果这还不足以显示他记忆力的无比高超，那么他还能告诉你，史诗每一页的第一句和最后一句是什么。他能不假思索地背出前100个素数的前6次幂。至于当时数学上的所有重要公式，不用说都准确无误地保存在他的记忆里。他的心算能力同样举世无双。不论是算术的、高等代数的还是微积分的，甚至那些对有才能的数学家在纸上作起来颇感棘手的计算，他都能应付自如。有一次欧拉的两个学生计算一个复杂的式子，他们在答

数的第 15 位上差一个单位。为判定哪个正确，欧拉亲自心算了一遍。他的答案最后证明是对的。所有这些，现在都对他大有帮助，使他能泰然自若地面对黑暗的挑战。他失明以后还有一件事，说起来简直叫人难以置信。

在欧拉时代，要确定船只在海上的位置是一项极困难的工作。按当时的方法，纬度的确定还比较容易，只要通过对恒星的观察就可以解决。困难的是确定经度①。它需要知道月球每时每刻相对于一个标准位置（17 世纪后半期已经定为英国的格林尼治）的方位。这个方位要求有极高的精确度。假如角度上差一分，那么在经度上就会差半度。真是失之毫厘，差之千里。可是，要精确计算月球的方位真不容易，因为它牵涉到 3 个星球：太阳、地球和月球。这种“三体问题”是数理天文学中最困难的问题之一，甚至连牛顿对它也感到头痛。牛顿在《自然哲学的数学原理》第三卷中用几何方法研究过月球的运动，可惜用这个方法制作的月球位置表所带来的船只位置的误差高达 160 公里。这几乎是船只整整一天的航程，当然满足不了战争和航运事业的需要。各国政府和科学家为它绞尽了脑汁。英国专门成立“经度测定委员会”，并且设置高达 20000 英镑的奖金来征求解答。年迈的欧拉不顾自己已经双目失明，决定利用自己的分析对月球作一次透彻的计算。他的心血没有白花。欧拉的新方法把误差缩小到只有 30 公里。为了表彰他的功绩，英国海军部向他颁发了巨额奖金。

参天大树

双目失明仅仅是灾难的开始，不幸接二连三地向欧拉袭来。

1771 年的夏天严重干旱，彼得堡已经有 50 多天没有下过一滴雨。城市在烈日火焰般的烘烤下呻吟着，艰难地喘着气。傍晚时分，

① 18 世纪 50 年代末，经度问题由英国人约翰·哈里森用钟表法解决。

一间民房不慎失火整个街区像一堆干柴那样地燃烧起来，把天空映照得通红。欧拉正斜倚在沙发上，为一篇有关力学的论文打腹稿。等他听到外面惊慌嘈杂的响声和闻到扑鼻的焦烟气味，整个住宅已经被火舌吞没。欧拉急忙起来，摸索着向摆放自己手稿的桌子走去。不料在慌忙中脚被椅子绊住，身子重重地摔倒在地。呛人的浓烟滚滚而来，憋得他喘不出气。他挣扎着想站起来，可是四肢已经不听使唤。在这千钧一发的时刻，跟随欧拉多年的瑞士仆人彼得·克莱姆冲进屋来。他背起老主人转身就走。但是欧拉紧紧抓位门框不肯放手，要他丢下自己的心血去逃生绝对不行。他坚持要彼得用台布把一大堆尚未付印的手稿包好带上。时间已经刻不容缓，房子随时都可能坍塌。但是彼得执拗不过老人，只得遵命。当彼得背着失明而有病的老主人踉踉跄跄来到院子，只听得轰隆一声，图书馆倒了！整个住宅和全部家产随着冲天火光付之一炬，惟一幸免的是欧拉几千页尚未出版的手稿！

1776 年，欧拉痛失了 40 多年来朝夕相处，患难与共的忠实伴侣——柯黛玲。无论是早年在彼得堡的血腥恐怖日子里还是在柏林的屈辱环境下，无论是在双目失明的悲痛岁月还是在火烧家园的不幸时刻，柯黛玲总是和他一起分担着痛苦和优伤。她默默照料着偌大的家庭，使欧拉免去后顾之忧。现在，柯黛玲先他而去。欧拉抚摸着自己刚出版的新书怅然若失。由于孩子众多，自己又是行动不便的盲人，亟须一位能干的主妇来照料整个家庭，欧拉只得再度结婚。第二个妻子珊萝·亚佩吉·格赛尔，是柯黛玲同父异母的妹妹。

为恢复左眼视力的手术失败，宣告欧拉永远失去重见光明的希望。原来根据医生的诊断意见，通过手术可能使左眼恢复视力。手术十分顺利。欧拉心焦地计算着哪天能复明。他想像着又见到了灿烂的阳光，用眼睛来“抚摸”那一个个妙不可言的数学符号。一想到这里，他抑制不住内心的激动。可是希望又一次落空，患部发生了感染。经过一段难熬的拖延，他终于没有挣脱黑暗的无情魔掌。

但是，欧拉是棵高耸入云的参天大树。一切不幸和挫折，即使

如暹凶的冰雹雷击，肆虐的风霜雨雪，也摧毁不了他旺盛的生命力，反而使他更苍劲有力，气势非凡！面对命运的重重打击，欧拉泰然自若，我行我素。这位巨人以他堆积如山的精心杰作向全世界证明，只要志向明确，意志坚强，锲而不舍，勇往直前，一个人，即使是一个盲人，也可以创造出人间奇迹！

前进吧，前进将使你产生信念

17世纪在英国点燃的工业革命之火，到欧拉时代，在整个欧洲已经形成燎原之势。发明和工业，扩张和财富，继地理发现之后的科学发现，这一切都给人们以信心。黄金时代正露出曙光，人类的心灵正从沉睡中觉醒。科学家热切地要去征服世界，去探索宇宙的奥秘。伟大的牛顿逝世那年，欧拉刚刚20岁。这时候，笛卡儿的坐标几何问世已有90年，微积分的建立大约已有50年，而物理和天文学的关键——牛顿万有引力定律已经在科学界流传了将近40年。在这些领域里，大量孤立的问题虽然已经获得解决，但是对当时纯粹数学和应用数学所面临的种种问题，却还没有来得及发动一场系统的全面的进攻。笛卡儿、牛顿、莱布尼兹所发明的强大的分析方法远没有开发到应有的极限。诱人地展现在欧拉面前的是一片广袤肥沃的处女地。

不过，18世纪的数学同今天相比，还显得相当粗糙。在欧拉时代，微积分的基础本身还不清楚，而且从诞生之日起就一直受到攻击；无理数的概念还模糊不清；连负数也遭到非议；对复数不用说更是错误百出。像欧拉所著《对代数的完整介绍》一书，1768年-1769年在俄国第一次出版，1800年在德国出版，是公认的18世纪最好的代数教科书，其中就有这样的错误：

$$\because \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b},$$

$$\therefore \quad \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}=\sqrt{(-1)\cdot(-4)}=\sqrt{4}=2。$$

今天的每个初中学生都知道，在根式运算中必须以 a、b 不小于零为

前提。

但是，英国数学物理学家贺拉斯·兰姆说得好："不亲自检查桥梁的每一部分的坚固性就不过桥的旅行者是不可能走远的。甚至在数学中有些事情也要冒险。"达朗贝尔更有一句为人们广为引用的名言："前进吧，前进将使你产生信念！"18世纪的数学家正是在缺乏理论保证和逻辑支持的情况下，仅仅依靠一套明确的运算法则和数学的物理意义，勇敢地开辟前进的道路。他们对数学的方法确信无疑。分析在物理应用上所取得的不同凡响的成功使他们陶醉，而无暇顾及数学的严密性。在他们看来，追求证明的严密性似乎是自找麻烦。"为什么要用深奥的推理去证明那些人们根本没有怀疑过的东西呢？"因此，人们正确地称这个时代是英雄的时代，而欧拉更是英雄时代里的数学英雄。他凭借威力无比的分析武器，以磅礴的气势向数学各个领域发起猛攻，夺得了一个又一个令人惊羡的成果。他在微积分、微分方程、曲线曲面的解析几何和微分几何、数论、级数和变分法等领域中都有辉煌的成就。他把数学应用于力学，创立了分析力学和刚体力学。他的研究足迹遍及当时科学的一切领域。上至天文，下至地理，大到行星轨迹，小到分子运动，从潮汐理论到船舶设计，从声的传播、光的波动到人体的血液流动，从望远镜、显微镜的设计到梁的弯曲和弹道的计算，……范围是这样广阔，内容是这样深刻，以致要写出他的全部发明项目都需要好几页的篇幅，而他所提出的创见至今仍有待于我们用心研究的，还可以列出长长一串。怪不得仅仅为整理他没有发表的文稿就使彼得堡科学院足足忙碌了47年！欧拉为我们清理好场地，开辟出道路，把一切有价值的发现连接成一个整体。正是在这个基地上才建起今天繁荣的现代数学之城。可能在欧拉著作中有个别结论在今天看来是不成熟的，甚至是错误的，但是正像白璧的瑕疵，太阳的黑子，时代的局限性毕竟掩盖不了他那光芒四射的成就。因此，大数学家高斯极其公正地指出："研究欧拉的著作始终是各个数学领域里最好的学校，没有任何别的可以代替它。"拉普拉斯也满怀敬意地提

到这位可敬的长者:"读读欧拉，读读欧拉，他是我们大家的老师。"

1783年9月18日，像往常一样，全家还在睡梦之中，欧拉已经摸索着起床。老仆人轻轻地把他搀扶到花园里，坐在安乐椅上。彼得堡秋天的黎明凉气袭人。远处屋顶上袅袅炊烟和地平线上轻柔的晨雾，在早霞衬托下把城市点缀得五彩缤纷，富有诗意。偶尔传来马车驰过的辚辚声和行人的脚步声。随着城市的苏醒，老人永不疲倦的大脑开始了一天的工作。不久前，法国航空先驱者约瑟夫-米歇尔·蒙戈尔费埃和雅克-艾蒂安·蒙戈尔费埃兄弟搭乘充满热气的气球成功地飞上天空。现在欧拉正在凝神思考，怎样用数学来描述气球冉冉上升的运动。中午，欧拉和家人有说有笑地共进了午餐，饭后在沙发上假寐片刻。天王星是新近发现的，他思索着说出它的轨道。这个结果同观测数据正好符合。老人感到有点疲乏，想稍稍休息一下。他一边喝茶，一边逗孩子玩耍。突然，一阵晕眩，烟斗从手中掉落。欧拉只来得及轻轻说出一句话："我不行了。"这位一生奋斗不息、为数学无畏地献出自己双目的老人，终于"停止了计算，也停止了生命"。



拉格朗日

(1736—1813)

"我不知道。"

——拉格朗日

数学科学的一座巍峨的金字塔

约瑟夫·路易·拉格朗日是18世纪法国最伟大、最谦和的数学家。他在数论、代数方程论、微积分、微分方程以至天文学和物理学等领域都有独特的贡献；他和欧拉一起缔造了变分法，并且在这个基础上创立了分析力学。法国皇帝拿破仑一世称他是"数学科学的一座巍峨的金字塔"。他请拉格朗日当上议院议员，授予伯爵爵位和各种荣誉勋章。撒丁①国王阿马戴乌斯三世和普鲁士的腓特烈大帝也给予他许多荣誉。同时代的著名数学家傅里叶对他更有一个全面的评价：

"拉格朗日在整个一生中，以他欲望的适度和对人类命运的不可动摇的关切，以他生活的简朴和品格的高尚，最后，以他科学工作的准确性和深刻性，证明了他是一位伟大的数学家，也是一位哲学家。"

---

① 撒丁王国，也称皮埃蒙特-撒丁王国，1720年以后为萨伏依王室所统辖，19世纪50年代以后成为统一意大利的核心力量。1861年成立意大利王国，撒丁王国国王成为意大利的第一位国王。

心灵的召唤

1736 年 1 月 25 日，屋顶上的积雪在阳光下闪闪发光，亮晶晶的水滴顺着屋檐淅淅沥沥地奏起悦耳的乐曲，一种说不出的欢乐和紧张不安的气氛笼罩着亚平宁半岛西北部的都灵城里一幢赭红色的宅院。当玛丽·拉格朗日太太抱起哇哇啼哭着的婴儿的时候，双唇不禁微微颤抖，泪水顺着面颊扑簌扑簌地往下掉。命运总是和她作对，每当她刚刚尝到欢乐的甜头，就引来无限的惆怅。约瑟夫已经是她的第 11 个孩子啦，可是上面的 10 个孩子降生不久，都被无情的病魔夺去了生命。

这一次，命运终于露出笑容。约瑟夫长得白白胖胖，逗人喜爱。笼罩在拉格朗日家的不安气氛被孩子清脆的笑声驱赶得无影无踪。约瑟夫·路易·拉格朗日兼有法国和意大利的血统。祖父是法国的炮兵队长，受聘来到都灵为撒丁王国服务，和当地一位名门闺秀结婚以后，就在这里定居下来。父亲一度是撒丁陆军部的司库；母亲玛丽是坎培诺一位富有的物理学家的独生女。活泼可爱的约瑟夫一诞生，就成为全家的中心。不过父母亲没有把他整天“含在嘴里”。他们对孩子提出严格的要求，并且亲自指导他的学习。

小拉格朗日性格沉静。可能是因为没有兄弟姐妹的缘故，他难得一个人到花园里嬉耍。他喜欢和爷爷一起在书房里消磨时光。那里的每一本书，每一册画，白发苍苍的爷爷都能给他讲一则动人的故事。爷爷的神情是那么庄重，他说的话是那样富于感染力，听着听着，小拉格朗日仿佛来到尘土飞扬的大道上，看到奴隶们在烈日下拖着沉重的脚镣蹒跚前行，他们的背上印着道道血痕；又好像站在农夫阴暗的茅舍门前，听见小女孩跪在床前低声抽泣，骨瘦如柴的母亲已经奄奄一息；……等到爷爷讲完故事，小拉格朗日已经泪痕满面。故事的悲惨情节把他深深打动了。

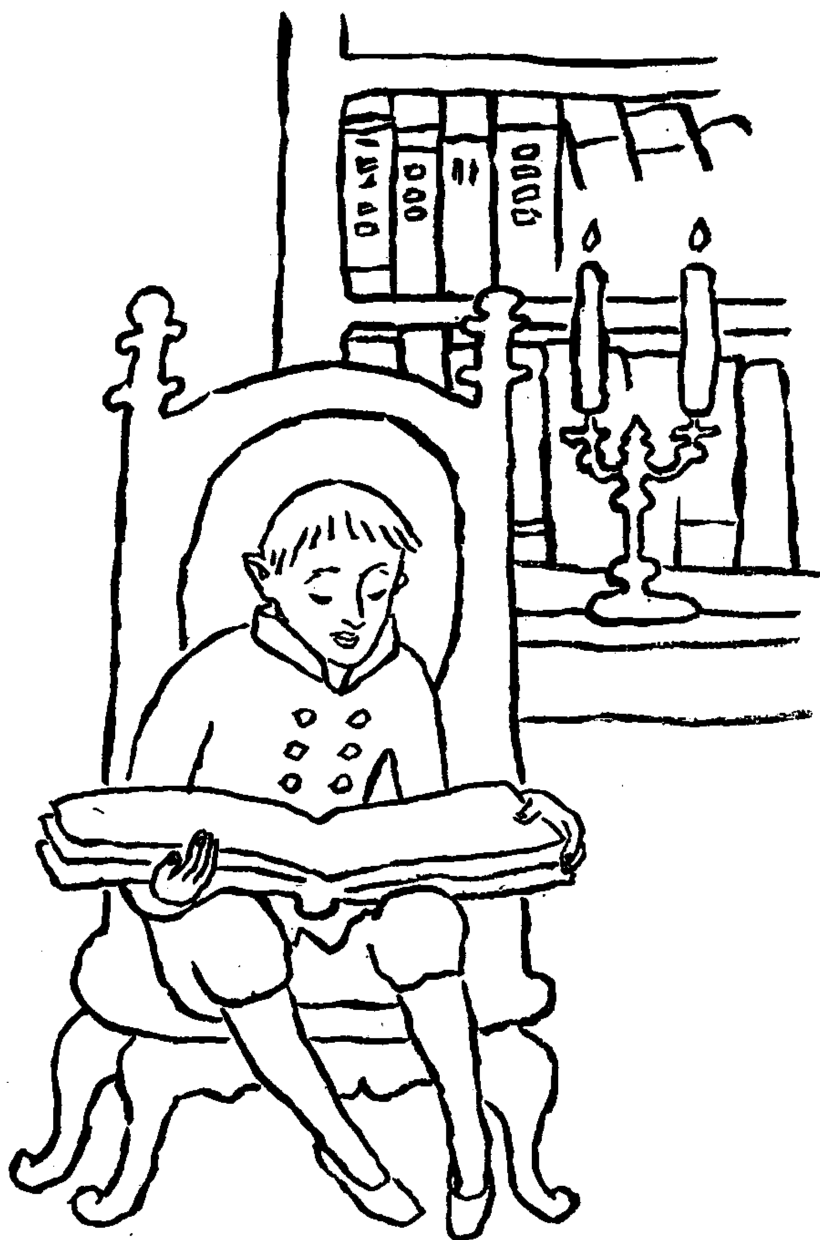
在学校里，拉格朗日最喜爱古代语言。他不但通晓希腊语和拉

丁语，还能写一手好文章。他一直记得，头发花白的语文老师拿着他的文章用抑扬顿挫的声调在班上朗读的情景。有人说，数学家应该是诗人。这句话有点道理。数学家不是干巴巴的“计算机器”，只知道和各种“枯燥无味”的数学符号打交道。从历史上看，几乎一切的大数学家，像笛卡儿、费马、牛顿、莱布尼兹，以至后来的欧拉、高斯、柯西、罗巴切夫斯基等，他们对文学，对古代语言无不具有强烈的爱好和极高的修养。我国的华罗庚、苏步青等著名数学家也有许多诗文佳作，在文学上有相当的造诣。这显然不是偶然的巧合。因为一个好的数学家，不但要有机敏精细的头脑，还需要有诗人般的想像力。

放学回家，拉格朗日独自一个人关在书房里，爬上小梯子在书架里东找西翻，尽情浏览。他博览了数不清的哲学、历史、文学和艺术的经典著作，也看了许多欧几里得和阿基米德的数学著作。希腊数学家的杰作，构思巧妙，立论严谨，每一个专题都称得上是数学科学的一颗明珠。伟大的阿基米德的创造天才和孜孜不倦的钻研精神，赢得拉格朗日的深深景仰。不过，他对几何的方法总感到不满足。因为用这种方法解决问题，没有一致的固定程序可以遵循，需要有极高的技巧，而它所解决的问题往往只局限于所考虑的特定图形。有一天，他在一堆亚里士多德的著作里，无意中翻出一本灰白色封皮的小册子。虽然只有薄薄几页，却有一个极长的书名：《微积分简介——微积分方法和它对于希腊几何方法的优越性》，作者是牛顿的朋友哈雷。一本科普读物和古希腊的经典哲学著作夹在一起，显然是放错了地方。他不觉信手翻阅起来。如果有人说，一部好的科普作品可以产生一个伟大的科学家，恐怕谁也不会相信。不过，拉格朗日确实是受到哈雷作品的启发，走上献身数学科学的道路。在这样一个事实面前，拉格朗日受到巨大的震动：和历史悠久的希腊几何相比，微积分不过是刚刚脱离襁褓的幼儿。可是，就像《封神榜》里的哪吒，年龄虽小，本事却无比高强。无论在数量上还是难度上，他竟然创造出连几何“爷爷”都梦想不到的奇迹。

他怔怔地拿着哈雷的小册子，满脸通红，眼睛里放射出奇异的光彩。对分析的热情在他的心中熊熊燃烧。他听到自己心灵在召唤：这是一项值得终身为之奋斗的事业！

从此以后，在拉格朗日的房间里，古希腊的哲学名著让位给牛



心灵的召唤

顿的《自然哲学的数学原理》；欧拉浩瀚的论著挤走了古典的文艺作品。夜深了，家里的人早已进入梦乡，拉格朗日的房间仍然亮着灯。看到孩子废寝忘食地攻读，母亲不得不穿起衣服来干涉。拉格朗日是听话的孩子，他答应妈妈看完这一节就休息。可是看好以后，他躺在床上，辗转反侧，怎么也睡不着。他悄悄爬起来，用一块黑布把油灯遮上，想稍微再看上几页。心想知道了下文的概略或许可以安睡了。谁知一捧起书本，他竟把自己的约束忘得一干二净。欧拉无疑是数学分析方面举世无双的大师，他的著作流畅自然，浑如天成。看了上一节不由得你又急着想看下一节。拉格朗日流连在繁花似锦的分析园地里，完全着迷了！就这样，拉格朗日在书桌旁送走一个个阴冷的黑夜，在求索的喜悦中迎来霞光万道的黎明。经过日日夜夜的精心雕凿，璞玉焕发出璀璨的光辉。教师和同学都惊讶地发觉，和他的数学才华相比，拉格朗日的文学成绩简直不值一提。“分析学家”的美誉很快传遍全校。到毕业的时候，老师特别把他推荐到著名的都灵炮兵学校，向未来的炮兵军官讲授高深的数学理论。

挑　　战

皇家炮兵学校坐落在都灵的东南，是一幢三层楼哥特式的建筑。两旁婀娜多姿的菩提树，像欢迎的行列一直通向大门。年龄刚刚 19 岁的拉格朗日来这里讲授弹道学理论的消息，引起学生们的巨大好奇。他们挤在校长室的门口，都想一睹青年教授的风采。拉格朗日穿一件深褐色的长袍，身材修长；高高的鼻梁，下巴瘦削，配上一对机敏的眼睛，显得十分精神。他说话不多，轻声轻气地，与其说他是数学家，倒不如说像文静的姑娘。看着新来教师腼腆的模样，校长的心里不禁嘀咕起来：聘请这样一个还带着几分稚气的年轻人来担任数学教授是不是太冒失？幸亏还没有等他想出一个不损伤青年自尊心的辞退方法，事实已经作出回答。拉格朗日端庄的举止和

学术上的精湛造诣把同事们彻底征服了；他和蔼可亲的态度和精细入微的分析讲解博得同学们的交口称赞。校长心头的疑虑顿时烟消云散。不过，总还有个别的“老顽固”想试一试这个“乳臭未干”的小青年的真本事。有一次，一个同事好不容易从《难题集锦》一类书本中找来几个“难题”，来向他挑战。这当然找错了对象。拉格朗日解答这类问题，轻松得就像在做最简单的小学算术题。

这时候，拉格朗日要挑战的是变分法，这是难住了当时著名的大数学家欧拉的一个难题。在本书第6章里，我们介绍过产生变分法的那些求极大或极小值的实际问题。在数学上讲，就是求某个“泛函”的极值。泛函和常见的函数不同，它的定义域是由一些函数构成的集合而不是通常的点集。这使得问题异常棘手。欧拉经过10多年的努力，利用几何和分析相结合的方法来求极值曲线取得成功。不过他的论证极其复杂，应用的范围也受到限制。尽管存在这些缺陷，能够在这样困难的领域里取得进展，还是受到高度的赞赏。欧拉立刻理所当然地被公认为当时健在的最伟大的数学家。俗话说：“初生牛犊不怕虎。”初出茅庐的拉格朗日没有被欧拉的名声所吓倒，更没有在变分法的难度面前畏缩。他发现欧拉的方法“不具有用纯分析方法来解决一个问题所希望的那种简明性”。他决心另辟蹊径，找出一种比较简便的、统一的方法来。他写信征求老前辈欧拉的意见。欧拉自己也曾经探索过用纯分析方法来求极值曲线，可是，用他自己的话说，他遇到了“无法逾越的障碍”。看到都灵一个默默无闻的青年居然有这样的雄心壮志，欧拉大为吃惊。不过，老欧拉有宽阔的胸怀和自知之明。年轻人发誓要超过他，他不认为是触犯了自己的尊严。他清楚，人类向科学高峰的攀登是一项无比壮丽的伟大事业。它不是一个天才的工作，也不是几个天才的工作。这需要一代人踩着上一代人的肩膀，一代一代地向上攀登。在变分法领域里，欧拉走到了自己的老师约翰·伯努利的前头，现在，都灵的一个青年摩拳擦掌地要冲到自己的前面去了。他没有不快或妒意，只有无限的欣慰之情。老欧拉愉快地摊开稿纸，写了一封热情

洋溢的回信。

征　服

欧拉的回信，吹响了向变分法发起总攻的冲锋号。拉格朗日精神抖擞地投入战斗。一间不到20平方米的书房成了伟大决战的战场。在这里，既听不见刀光剑影的厮杀声，也闻不到硝烟迷漫的火药味。运筹帷幄的拉格朗日端坐在椅子上岿然不动，只有偶尔轻轻发出的“啊！”或“唔——？”才打破这里凝重的寂静；从他的鹅翎笔下飞快地写出一串串复杂的符号和式子，只有从堆积得愈来愈高的稿纸才可以感到时光的流逝。

不幸，好事多磨。正当战斗进行得难解难分的时刻，飞来了意想不到的横祸，父亲突然宣告破产。万贯家产顷刻间被变卖一空。拉格朗日只好迁出自己心爱的书房，寄居到一位远房亲戚的家中。这位亲戚膝下只有一个年轻的女儿——奥薇拉。空荡荡的大房子很欢迎有一个男青年来同他们作伴。母亲含着眼泪送他到亲戚家的门口。离开母亲，拉格朗日心情沉重。不过，卸脱了沉重的财富包袱，却使他有说不出的轻松。平日来往的富家子弟纷纷不辞而别。再也不用担心恼人的应酬或宴请来打扰他潜心的思考，也不必为处置庞大的家产而发愁。他在晚年真诚地谈起这件事：

“如果我继承可观的财产，我在数学上可能就没有多少价值了。”

这番富有哲理的话，多么发人深思！

除了到学校讲课，拉格朗日关在房间里足不出户。连续工作几十个小时，对他是件常事。寂静的夜晚，是他思考问题的最好时光。他不会抽烟。在困倦的时候，他就泡一杯浓茶或煮上一壶咖啡。奥薇拉对他十分关心。姑娘比他大两岁，长一头金黄的头发，婀娜多姿。虽说家里有仆人，每天的点心总是她亲自送到他的桌旁。在寒气逼人的深夜，她悄悄地来到身旁，把衣服披在他的肩上。离去的

时候，回眸对他嫣然一笑，留下一片女性的温馨。可是到第二天清晨，姑娘捧着芬芳的郁金香推开房门一看，心中不由得一阵难过。放在他桌子上的点心纹丝未动，却在旁边堆起了厚厚的草稿。他的头微微前倾着，庄严得像尊雕像。他一手扶着椅把，一手握着鹅翎笔，披在肩上的衣服滑落在地上。房间是这样的静谧，好像连空气都静止不动了。姑娘含着泪赶忙退出来，把门掩上。

窗前的梧桐树，凋零了又抽出嫩芽，茂密了又落叶纷纷。拉格朗日开始向变分法挑战的时候，树梢还在窗户的上方，现在已经高高蹿出屋顶。1759 年 1 月，经过 4 年不懈的努力，拉格朗日终于为范围广泛的极大极小问题找到了真正的纯分析的解法。这种方法，甚至连它的记号，除了个别的改进外，直到今天仍在普遍采用。老欧拉衷心地向这位都灵青年表示祝贺，并且愉快地承认，这个方法使他克服了“多年来一直没有能够解决的困难”。同一年，由欧拉推荐，年纪不过 23 岁的拉格朗日当选为柏林科学院的外籍院士。这一不同寻常的荣誉，对于撒丁王国来说无疑是头等的喜讯。消息传来，皇家炮兵学校一片欢腾。师生们聚集到楼前，把拉格朗日抬起来，抛向空中。撒丁王国国王阿马戴乌斯三世派御用马车把青年数学家接到王宫，准备大大奖励一番。可是拉格朗日既不喜欢高官厚禄，也不稀罕荣誉勋章。被外国的科学院选为院士，固然值得高兴，但是，他感到美中不足：为什么不能有撒丁自己的科学院呢？所以，他在国王面前只有一个简单的要求：在都灵成立一个学术团体。国王当场慷慨地答应资助。后来，这个团体发展成为都灵科学学会，对撒丁科学的发展起了重大的作用。

1759 年 11 月，学会的第一卷论文集在拉格朗日主持下出版。他以《论确定不定积分公式的极大极小的一个新方法》为题，正式把自己发明的方法公布于众。拉格朗日通过在两个端点引进一条曲线，而不像欧拉那样去改变极大或极小化曲线的个别坐标，很方便地推导出欧拉的全部结果。他在文章中更提出一个大胆的计划，要把变分法应用到力学，推导出刚体力学和流体力学的全部公式。他

不是在这里自吹自擂。30 年以后，他实现了自己的诺言。拉格朗日的第二篇论文，是把微积分应用于概率论，大大推动了概率论的发展。年轻的巨人还不满足。他在第三篇论文《自然界及声音传播的研究》中进一步推进了牛顿的声学理论。他把声音的传播精细地看做一条直线上所有的空气质点在振动作用下一点接一点地沿着直线运动。在数学界引起强烈反响的第四篇论文，是他提出了振动弦的数学公式，对振动理论的发展作出贡献。

拉格朗日作为主编，还为论文集的其他作者不声不响地提供过许多宝贵的意见。其中有一篇关于船舶的论文写得是这样出色，以致撒丁国王决定把名叫福赛纳克思的作者提拔为海军大臣。撒丁国王哪里知道，论文写得这么好，完全是拉格朗日作了精心修改的结果。怪不得他感到纳闷，为什么从此以后再也见不到这位大臣的高水平的论文啦。

都灵的论文集像投下一块巨石，在欧洲激起层层波澜。人们都以无限惊羡的目光注视着这位精力充沛的青年，他奇迹般地征服一个又一个高峰。没有任何东西可以阻挡拉格朗日青云直上。他不到 24 岁，已经同最负盛名的欧拉和伯努利兄弟齐名了。

达朗贝尔

拉格朗日的成就使欧洲的数学家瞠目结舌。欧拉和达朗贝尔更是渴望着见一见这位才华洋溢的青年同行。他们打算把他请到柏林科学院来工作。可惜，为了说服刚愎自用的腓特烈大帝，整整交涉了 7 年。等到拉格朗日风尘仆仆地来到柏林，欧拉和达朗贝尔已经各奔东西了。

达朗贝尔比拉格朗日年长 20 岁，虽然还没有见过面，却已经深深爱上了这位腼腆的青年。从 1759 年以后，他和拉格朗日在学术上相互切磋，生活上相互关心，通信常年不断。这种感人的友谊一直保持到达朗贝尔生命的最后一刻。

让·勒朗·达朗贝尔是贵族的私生子，他取名于巴黎的一座小教堂——圣·让·勒朗。在秋天的一个深夜，达朗贝尔被他的生母遗弃在这座教堂的台阶上。等到天亮，看门人打开大门，可怜的弃婴已经奄奄一息，哭不出声音。教堂的主事赶紧把他抱给附近的一位陶工抚养，陶工夫妇虽然一贫如洗，却待他亲如骨肉。达朗贝尔的生母私下打听到儿子在什么地方。后来达朗贝尔显露出不凡的天赋，她哭着想把他要回去。陶工夫妇不忍心拒绝她的要求，何况孩子的生父还是一名贵族呢。可是小达朗贝尔并不把优裕的物质生活放在眼里。

“你只是我的继母，”孩子冷淡地对她说，并且指着陶工的妻子接着说，“她才是我真正的母亲！”

后来，达朗贝尔成了法国科学界的大人物。他尽心报答可敬的陶工夫妇，骄傲地称他们是自己的父母。

达朗贝尔曾和狄德罗合编大百科全书，是法国主要启蒙思想家之一。在科学上，他第一个给出著名的岁差①问题的完全解答；他在《动力学论》中提出有名的“达朗贝尔原理”，使动力学的基本规律可以作为静力学来处理，为后来拉格朗日统一力学的工作提供重要的依据；他关于振动弦的理论使他和丹尼尔·伯努利一起成为偏微分方程的创始人。达朗贝尔的著作深入浅出，通俗易懂，深受公众的喜爱。

达朗贝尔异常器重拉格朗日这位都灵青年，不断鼓励他向高难度的重大问题进攻。因为达朗贝尔自己的健康状况不佳，他要拉格朗日注意身体健康，不要过多地进行“超时工作”。在一封信里，他批评拉格朗日用茶叶和咖啡来提神；在另一封信里，他介绍拉格朗日看一本有关科学家疾病的医书。可是达朗贝尔苦口婆心地劝诫只得到一句简单的回答：

---

① 岁差是地球自转轴的周期变化所引起的春分点沿黄道面（即地球轨道面）的运动，由太阳和月球引力对地球赤道隆起部分的作用所引起，是继人类发现地球的周日运动和周年运动后发现的第三种运动。

“我正发疯似地工作，并且感觉良好!”

捷报频传

在这些日日夜夜，拉格朗日正在为太空中星球的运动绞尽脑汁。由于航海的需要，天文学统治着18世纪的物理研究领域。和这个世纪的其他大数学家一样，牛顿力学的这种应用是拉格朗日一生中重要的兴趣之一。月球的运动受到他们特别的注意。因为确定船只的位置需要知道月球的精确的方位；同时，月球运动还可以用来预报日蚀和月蚀，这对数学方法以至整个天文学理论无疑是一种激动人心的检验。拉格朗日首先解决的一个重大课题是月球的天平动问题：月球虽然总以同一个面对着地球，但是在地球上观测月面却有上下和左右的摆动，这就是所谓天平动，它表明月球环绕着月心在作周期性的摆动。这是有名的“三体问题”的又一个例子。为了天平动问题的圆满解决，拉格朗日荣获1764年的法国科学院大奖。

这一重大胜利鼓舞法国科学院提出一个更加困难的课题：计算木星的卫星轨道。在当时，木星的卫星只发现4颗，因此木星系统（太阳、木星和它的4颗卫星）就是一个“六体问题”。即使在今天，我们还找不到这类问题的彻底的精确解。拉格朗日利用近似的方法，用几个不等式来表达，取得可观的进展，从而赢得1766年的法国科学院的奖金。

不久，令人羡慕的这一奖金又被他的《论三体问题》的论文所夺走。我们知道，三体问题在一般情况下得不到精确解，但是拉格朗日在这篇论文中得到了三个特殊的精确解，其中的一个解是：假如3个物体从一个等边三角形的3个顶点开始运动，那么它们就好像固定在这个三角形上，而这个三角形本身围绕着三物体的质量中心转动。对拉格朗日来说，这个解并没有实际的例子，只不过是数学推导的结果罢了。想不到经过一个半世纪，在1906年，人们发现这一情形正好适用于太阳、木星和一颗名叫阿基里斯的小行星（小

行星 588 号）。后来，他对月球的运动和彗星的摄动①，也取得了类似的成功。

捷报频频传来，给宁静的都灵城带来兴奋和欢乐。1766 年 3 月，都灵风和日丽，春色撩人。撒丁国王决定趁明媚的春光请拉格朗日到巴黎和伦敦作一次公费旅行，到那里去观光游览，会见同行。说实在的，撒丁国王不愿错过提高撒丁王国国际威望的大好机会。

蹄声嘚嘚，车轮飞滚。四匹骏马载着撒丁王国的科学使者风驰电掣般昂首飞奔。马车在坑坑洼洼的道路上颠簸。拉格朗日浑身轻松，尽情享受着难得的休息。阿尔卑斯山上仍是白雪皑皑，道路两旁的田野却已经一片翠绿。在儿童时代，他坐过这样的马车。那是 20 多年以前的事了。那时候，每到夏天，他总要和妈妈一起到坎培诺的外婆家去度假。外公每天带着他在海滩沐浴地中海灿烂的阳光，欢快地捡着美丽的贝壳。在他的书桌上，现在还放着一只插鹅翎笔的大海螺呢。他最爱吃外婆做的甜馅饼，焦黄的酥皮，夹着厚厚的果酱，又香又脆！如今，外公外婆已经安眠在坎培诺的一块白色墓碑下，他再也吃不到这样美味的馅饼啦。儿时的回忆又甜蜜又惆怅，不知不觉把他带进梦乡。……

马车一驶进巴黎宽阔的街道，拉格朗日立刻置身于友谊的海洋。巴黎热烈欢迎他的到来。达朗贝尔像久别重逢的亲兄弟，同他紧紧拥抱。他高兴地会见了巴黎知识界的知名人士。频繁的应酬忙得他晕头转向。最使他苦恼的还是那豪华的宴会。长期不知疲倦的操劳，严重损害了他的肠胃；并不富裕的收入，使他只习惯于清淡的食物。他脆弱的消化系统怎么抵挡得住那一道道法国的、意大利的色彩缤纷、香气四溢的佳肴所组成的滚滚洪流？他病倒了。剧烈的呕吐和疼痛，彻底打消他继续旅行的念头。尽管撒丁驻英国的公使卡列西奥里正在伦敦为他的到来积极张罗，一俟身体稍稍康复，他就迫不及待地返回都灵。这时候，普鲁士腓特烈大帝的一封邀请信正端放

① 摄动，天文学名词，指天体的运动由于另一天体的吸引或相撞而产生的偏离。

在他深褐色的书桌上。

我不知道

如果说在7年前，当欧拉和达朗贝尔为拉格朗日来柏林科学院工作奔走呼号的时候，腓特烈大帝对都灵这个名不见经传的青年还瞧不上眼，那么现在他最担心的是，拉格朗日会不会被别的科学院抢走。正主持柏林科学院的欧拉已经提出辞呈，老欧拉心直口快，即使在堂堂的普鲁士国王面前也直言不讳，不留情面。这引起一生追求虚荣的腓特烈的不快。他粗暴地称欧拉是“吵吵嚷嚷的独眼龙”，一心要把他撵走。无论从哪一方面来衡量，再也找不到比拉格朗日更理想的人选。拉格朗日的学术地位和欧拉并驾齐驱；他对哲学深有研究；尤其使腓特烈中意的是，拉格朗日的谈吐举止高雅得体，一看就知道出身于高贵的门弟，绝不像欧拉，是个贫微的乡村牧师的儿子！因此，腓特烈向拉格朗日发出邀请：

“如蒙您屈驾光临，我就有幸在我的科学院里，以一位有两只眼睛的数学家来代替只有一只眼睛的数学家，这对解剖部门来说，尤其是一个喜讯。”

腓特烈的“诙谐”使拉格朗日恶心。自命不凡的普鲁士国王对待科学家的粗鲁态度，在这封冠冕堂皇的邀请信里表现得十分露骨。但是，为年轻的拉格朗日的前途着想，达朗贝尔和朋友们还是劝他到柏林去，虽然达朗贝尔本人曾经轻蔑地回绝过同样的邀请。因为不管怎么说，作为伟大欧拉的继承人，这个事实本身就是非同寻常的荣誉。在朋友们的再三劝请下，拉格朗日勉强地应允了。

初冬的柏林，天气阴沉。1766年11月6日，从都灵远道而来的拉格朗日在皇宫受到腓特烈大帝隆重的欢迎。矮小的国王踮起脚跟，洋洋得意地拍拍青年数学家的肩膀宣称：“欧洲最伟大的君主”在他的宫廷里荣幸地有了“最伟大的数学家”。至少，后一个称号并没有夸张。拉格朗日被委任为柏林科学院物理-数学部主任。

但是，这个差使远不像想像的那样轻松愉快。虽然腓特烈表示热烈欢迎，普鲁士的科学家们却憎恶由一个异国人来这里发号施令，何况这个撒丁人才 30 出头！他们暗地里称他是腓特烈的“进口货”，有时甚至当面和他顶撞。幸好这位第一流的数学家有第一流的涵养。坎坷的家庭经历教会他怎样应付这些不愉快的场面。想当年，父亲一宣告破产，平日一副亲热面孔的“好”朋友，一夜之间成为陌路人。同他们相比，这些普鲁士人毕竟有正当得多的理由。面对牢骚满腹的同事，拉格朗日总是那么谦虚温和，彬彬有礼。他从来不摆起架子来指手画脚，相反，他懂得在什么情况下应该忍耐和保持缄默。同前任欧拉不同，拉格朗日喜欢沉思而不喜欢争论。他承认自己“对争论有极大的反感”。要是被逼得没有办法，他会巧妙地使自己的回答不使对方难堪，并且预先真心实意地申明：“我不知道。”

但是，切不可认为他软弱可欺，或者一味无原则地忍让。如果他的信念受到攻击，他懂得怎样进行自卫。有一件事给普鲁士的同事们留下难忘的印象：

拉格朗日受到达朗贝尔等朋友的启蒙思想的影响，对女科学家不抱偏见。她们的论文和信札，虽然数量极少，他都一视同仁。他知道，她们达到这一地步，要付出比男科学家大得多的代价。在今天，这样来对待女科学家，似乎不值一提。然而，在当时保守的普鲁士，抱这样开明的态度几乎不可思议。按照那时候的惯例，如果不把她们的信件或论文原封不动地退回去，就是最大的宽容。苦于找不到借口把他轰走的普鲁士人，抓到这根稻草如获至宝。冷言冷语和造谣中伤从四面八方向他袭来。可以想像，这种攻击对于一个还没有结婚的青年是一种什么滋味。但是，拉格朗日没有动摇。作为回答，他对她们的论文比以前审阅得更加仔细，回信也格外热情了。好心的学部秘书异常为难。他鼓起勇气把听到的流言蜚语告诉青年主任。谁知拉格朗日毫不生气，他微微一笑说：

“先生，我们都不要忘记自己的母亲正是女性啊。”

拉格朗日轻轻的一句话好似有千斤的力量，说得秘书面红耳赤地低下了头。

在和老朋友通信的时候，拉格朗日的意见是直率的，可是在科学院的正式报告中，他对别人科学工作的评价总是十分宽厚。在生活上，他从来不触犯别人，哪怕这种触犯有正当的理由。他置身于社交活动之外，埋头于自己的研究，直到同事们对他的存在感到习惯。温文尔雅的青年主任渐渐博得同事的喜爱和尊敬。作为对这位不爱抛头露面的青年数学家破格的优待，科学院同意他的论文可以不在大会上亲自宣读。

婚　　事

伴随着亚得里亚海送来的海风，柏林下起蒙蒙细雨。穿过连绵的群山和阴霾的云层，冲破冰冻的大地，春天来了。1767 年 3 月，拉格朗日和奥微拉在柏林大教堂举行婚礼。在都灵的时候，奥微拉对自己的“房客”早就倾心。可惜青年一头埋在工作里，丝毫没有察觉。爱情给姑娘以智慧和勇气。有一次，她邀请拉格朗日陪她上街去买东西。拉格朗日没有心思逛大街，不过他长期受姑娘的关照，不好意思拒绝。这次出门使拉格朗日“大开眼界”。他自己因为经济条件不好，在生活上知道精打细算。平日进出的也就是学校附近的几家小铺子，无非是买些墨水、纸张一类的东西。这一天姑娘把他带到一家豪华的商店，买起东西来大手大脚，满不在乎。银币哗哗地往外倒。本来心不在焉的拉格朗日大吃一惊。他实在看不下去，终于给她出主意，代她买起丝带和皮鞋来。谁知这正中姑娘的下怀。从此以后，她每次出门总拉着拉格朗日作伴。像晨曦透过窗帘悄悄地来到书房，拉格朗日不知不觉地坠入了情网。

结婚的喜讯传到巴黎，达朗贝尔写信来开新郎的玩笑：

“我知道你已经采取我们的哲学家们所谓的‘决定性步骤’，……大数学家首要的是应该懂得怎样计算自己的幸福。因此我毫不

怀疑，经过仔细计算，你已经找到婚姻问题的解。”

拉格朗日也开了个玩笑来回敬。他在回信中压根儿一字不提自己的婚事，弄得达朗贝尔摸不着头脑。

“我不知道计算得是好是坏，”拉格朗日后来向老朋友解释道，“或许，甚至可以说，我根本没有作过计算。我本来很可能像莱布尼兹那样终身不娶。他曾经被迫考虑过这个问题，但是下不了决心。我向你承认，我一向对结婚不感兴趣。……可是环境决定我和一位亲戚结婚，由她来照料我和我的一切事务。如果我没有告诉你，那是因为在我看来，这件事太无关紧要，根本不值得打扰你。”

婚后的生活十分美满。奥薇拉知道，时间对丈夫是多么宝贵。不用说，她再也不拉着他上街去买东西了。遇到拉格朗日的工作告一段落，主动陪她出去散步的时候，她会像小孩一样地高兴。奥薇拉无微不至地关怀着丈夫的起居和生活。妻子温存的体贴和甜蜜的笑容给拉格朗日增添巨大的力量。可惜奥薇拉没有能和丈夫白头谐老。她染上了可怕的肺病，这在当时是不治之症。拉格朗日彻夜不眠地在旁服侍，但是终究不能从死神的手中夺回爱妻的生命。

造了，拆掉，再造

从此，他只有用工作来慰藉自己。

失去妻子的“监护”，拉格朗日又恢复连续几十个小时工作的老习惯。肚子饱一顿，饿一顿，一度得到控制的胃病再度恶化了。病痛发作的时候，他只好一手捂着肚子，一手计算写作。额头上沁出一颗颗豆大的汗珠。鹅翎笔常常因为他的胃部剧痛被突然折断。但是，拉格朗日没有停笔，更没有草率从事。在给达朗贝尔的信中，他一边抱怨病魔无情的折磨，一边无可奈何地承认：

“我不可能得到休息。我有个坏习惯，要几次重写自己的论文，直到比较满意为止。对我来说，这个毛病已经改不了啦！”

在另一封信里，他说得更加形象：

“我像王公们建造宫殿那样，造了，拆掉，再造，……一直到我感到满意。可惜这样的机会很少。”

每一个结论，他要反复推敲；每一个公式，他要着力提炼。仅仅从实用上解决一个具体问题，不能使他满足。他必定要一步步深入到问题的最核心部分，找出规律性的东西，并且把它们概括成优美的数学公式。因为理论只有当它能用数学来描述的时候，才达到完美的境地。因此他的著作宏伟严谨，完美和谐，宛若辉煌的宫殿。从拉格朗日时代到今天，数学和力学取得了突飞猛进的进展。但是拉格朗日的许多结论至今仍然几乎一字不差地被引用着。他科学工作的准确性和深刻性，不仅受到同时代科学家的一致赞誉，也为后人所广泛传诵。尽管这样，拉格朗日不止一次地对自己的工作表示不满。在给另一位老朋友拉普拉斯的信中，他这样写道：

“我把数学看做是一件有意思的工作，而不是想为自己建立什么纪念碑。可以肯定地说，我对别人的工作比自己的更喜欢。我对自己的工作总是不满意。”

这是拉格朗日在自我标榜还是故作谦虚？不是。这是他的肺腑之言。拉格朗日完全知道自己工作的意义；他也不是在同行们面前故意贬低自己。但是，作为一位进取不息的科学家，他的目光始终注视着未来。日夜萦绕于他心间的，不是自己已经越过的障碍，而是正面对着他的新的更伟大的挑战。这就是拉格朗日总是对自己的工作感到不满足的真正原因。不盛开“谦虚”之花，结不出“伟大”之果。谦虚和伟大就是这样紧紧地连结在一起的。正如他自己所说：

“一个人的贡献和他的自负严格地成反比，这似乎是品行上的一个公理。”

朋友们看到他不顾一切地工作，都十分焦急。他们千方百计想让他好好休息一下。他们邀请他去狩猎，去野餐，去钓鱼，去跳舞，……几乎想得到的一切都试过了，可是，十之八九遭到他有礼貌的谢绝。大家都感到束手无策。碰巧有一次，音乐神童莫扎特随他父

亲和姐姐来柏林演出。大家决定请拉格朗日去听音乐会。这位奥地利音乐家果然有非凡的魅力，没有多费口舌，拉格朗日就一口答应。音乐会以后，朋友们兴致勃勃地来到他的家里畅谈感想。大家你一言我一语，气氛热烈。奇怪的是，主人拉格朗日只是含笑地听着，一言不发。客人们以为他必定另有高见。在大家的一再要求下，拉格朗日只好"坦白"：

"请诸位不要见笑。我去音乐会，是因为我不会欣赏。我听到头三拍，第四拍就区别不出来啦。这样，我就可以专心地思考问题，不会有任何东西打扰我。在这种音乐会上，我解决过不止一个难题。"

听了拉格朗日的一席话，大家不由得面面相觑！

理想实现了

拉格朗日呕心沥血的研究，在分析、天体力学，数论和代数方程理论等领域结出一串串引人注目的硕果。但是最重要的是，经过30年的精雕细凿，他终于建成一座无比辉煌的宫殿——《分析力学》，实现了自己青年时代立下的宏愿。因此，1782年9月15日，这个日子引起数学家的强烈兴趣。因为这一天，拉格朗日在给拉普拉斯的信中报告了这个好消息：

"一部关于分析力学的专著快要写好了。它建立在几个简单的原则或公式之上。可是，不知道什么时候什么地方能够出版，所以我并不急于最后完成它。"

早在都灵炮兵学校教书的时候，拉格朗日就开始酝酿这一宏伟的工程了。他要利用自己发明的变分法，把牛顿对力学的工作同欧拉、达朗贝尔等18世纪数学家的有关成果融为一体，把力学的各种原理统一起来，推导出刚体力学和流体力学的全部公式。《分析力学》对一般力学的意义，就像牛顿万有引力定律对天体力学的意义。它是一切力学必不可少的基础。爱尔兰数学家、理论物理学家

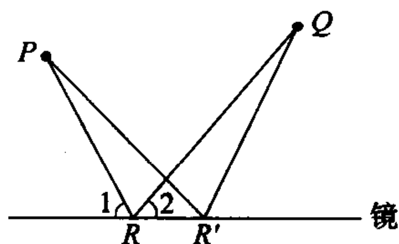
哈密顿（1805-1865）赞美拉格朗日的工作“使力学成为科学的诗篇”。

在《分析力学》中，拉格朗日第一次把当时人们所普遍接受的“最小作用原理”在动力学上用具体的形式表现出来：

对于单个质点来说，质量、速度和两个固定点之间距离的乘积的积分是一个极大值或极小值。

拉格朗日还相信，对于质点组，甚至对广义质量来说，这个原理也是正确的。

最小作用原理是人类长期观察和实践的总结。人们发现，光线从甲处射到乙处，走的是最短的路径；一颗石子从空中自由坠落，不会在中途拐弯。早在古希腊时代，欧几里得在《反射光学》中证明，如图，光线从 P 点经镜面反射到 Q 点，所取的路径 PRQ 必定是入射角等于反射角。后来希罗发现，这是一条最短的路径。它比任何一条能够想像的路径，比如 $PR'Q$，都要短。因此，在希腊时代以后，哲学家和科学家提出一种学说：大自然是以最短捷的可能途径行动的。在当时，人们接受这个原理，不但是因为它和他们的经验相符，还因为他们相信，物质行为和各种规律必须具有上帝创造的完美性。最小作用原理似乎满足这个准则：自然界是经济的。这样，他们利用这个规律的普遍适用，反过来“证明”上帝的存在和所设计的宇宙的完美性。但是，随着科学的发展，当科学的预言不断地和观察相符说明这些物理学的规律是完善的时候，上帝就节节败退。关心得到物理学上意义重大的结果，代替了关心上帝的设计。因此，和欧拉不同，拉格朗日接受最小作用原理，已经不需要上帝和建立在他的存在性上的任何前提。正是从这样一个极为平凡而又极为重要的原理出发，拉格朗日推导出支



配力学的著名的拉格朗日方程。这个方程被人们誉为“一切科学中一个最了不起的例子，它从最平凡的表面现象中抓到了最重要的线索”。

拉格朗日用分析方法来研究质点和质点组机械运动的普遍规律，标志着对希腊传统的第一次完全的突破。牛顿和他的后继者们在解决力学问题的时候总离不开画图。现在，拉格朗日证明了，如果一开始就应用分析方法，不但适用范围广泛得多，而且威力强大无比。在序言中，拉格朗日对分析有一段极为精彩的说明：

“我们已经有了力学方面的各种专著，但是本书的计划是完全新的。我曾经致力于把这门科学以及解决和它有关问题的技巧，归结为一般性的公式，这些公式的简单推导，就给出解决每一个问题所必需的全部方程。……在本书中找不到图形。我在其中阐明的方法，既不要求作图，也不要求几何的或力学的推理，而只是一些遵循着一致而规则的代数（分析）运算。喜欢分析的人将高兴地看到力学变为它的一个新的分支，并且感谢我扩大了它的领域。”

事实证明，拉格朗日的方法具有无穷无尽的生命力。这种方法，今天已经成为理论物理的一件普遍使用的锐利武器。

拉格朗日在序言中还以一种半开玩笑的态度指出，如果平面几何是二维空间的几何，立体几何是三维空间的几何，那么力学科学就可以看做是四维空间的几何。在有上下、前后、左右 3 个方向的三维空间中再加上一维时间，就可以确定一个动点的空间和时间。这种观点后来由闵可夫斯基①加以充分发挥，使狭义相对论的形式更趋完美，并且为广义相对论提供重要的基础。

《分析力学》即将完成的消息不胫而走。科学界人士纷纷打听著作问世的日期，无不以先睹为快。为了加快进度，勒让德自告奋勇，亲自负责校订。

---

① 海尔曼·闵可夫斯基（1864-1909）是俄国出生的犹太血统的德国数学家，创造几何数论；建立相对论的四维时空。

可是，正如拉格朗日所担心的那样，等到这部科学界翘首以待的巨著全部完成以后，果真找不到一处出版的地方！德国的出版商见到稿子中都是各种古怪而复杂的公式，莫不倒吸一口冷气。谁也不愿意问津这桩赔钱的买卖。30年的心血眼看要被束之高阁。有人劝他把稿子寄到巴黎去碰碰运气。拉格朗日在20年前访问巴黎的时候，结识一位名叫安培·莫里哀的神父，他对拉格朗日怀有深深的敬意。神父带着稿子去向一位认识的出版商说情。可是，任凭他说得口燥唇干，出版商只是一声不吭。“稿子写得再好，如果赚不了钱，管什么用呢?”神父不得不立下保证：在一段规定时间以后，把售不出去的《分析力学》全部买下来。精明的出版商这才答应接受这部稿子。

严酷的冬天

1786年，腓特烈大帝去世。对非普鲁士人的抵触情绪和对科学的冷漠气氛，使拉格朗日愈来愈难以在柏林呆下去。第二年，他接受法国国王路易十六的邀请，作为法国科学院院士来到巴黎，并且答应柏林科学院提出的条件，在今后几年里继续给它寄论文去。

巴黎1788年冬天，天阴沉沉的。狂风呼啸，大雪纷飞。到处是白茫茫的一片。窗户本来已经关得严严实实的，拉格朗日又拉起窗帘。房间里到处是零乱的书籍，新出版的《分析力学》被冷落地扔在角落里，上面蒙上一层薄薄的灰尘。法国还没有经历过那样严酷的冬天，连法国南部的港口城市马赛，气温都降到零下17-18摄氏度。报纸上每天都有穷人冻死的消息。就在法国科学院对面的门洞里，收尸人每天总要从那里抬走几具倒毙的尸体。

拉格朗日清楚地记得路易十六和玛丽·安托瓦内特王后在王宫接见时候的情景。路易十六对他的工作根本不感兴趣，只问他喜不喜欢打猎。因为国王本人是个狩猎迷。听到拉格朗日说，“我只拿过笔，没有拿过枪”，傲慢的国王扭头就走，把请来的科学家冷冷

地撇在一边。王后倒是显得殷勤。她拉着拉格朗日问长问短，似乎对他的工作很有兴趣。当安托瓦内特谈到想拜读他新出版的大作的时候，拉格朗日不由得苦笑起来。不过他还是有礼貌地表示十分乐于奉献一本。他没有说明，《分析力学》出版以后，他自己连翻都还没有翻过呢！王后亲热地邀请他去参加星期五的宫廷舞会，甚至还好奇地打听他为什么不再结婚。可是，不管王后多么热情，拉格朗日在富丽堂皇的宫殿里浑身感到不自在。后来他知道，这位妖艳的王后一星期要做 4 双新鞋，专门侍奉她的贵族有四五百名！

每星期的宫廷舞会，他可以借故不去。著名化学家拉瓦锡家中举行的科学家聚会，他盛情难却。拉格朗日的态度还和以前一样和蔼可亲，不过他不再主动和别人交谈。他茫然注视着窗外，流露出深深忧郁的神情。宫廷的穷奢极欲和劳苦大众的绝望处境强烈震撼他的心灵。他感到窒息，感到难过。自己 30 年研究的心血似乎只是在安托瓦内特王后的梳妆台上多了一件风雅的摆设。他的工作热情已经消失。如果有人告诉他，某个数学家正在研究一个重要的课题，他会说：

“愈多愈好，愈多愈好。这样，我只需要开始它而不必完成它了。”

对于数学本身，拉格朗日同样不抱乐观。当整个社会陷于绝望的时候，数学会有什么前途呢？他感到数学已经完成历史使命，至少是进入低潮。这个世纪的数学家以一往无前的精神开创了大量新的分支，取得了辉煌的战果。现在似乎到了尽头。它们已经变得这样复杂，以致除了个别的例外，一般都还找不到突破的线索。

在柏林的时候，他在给达朗贝尔的信中已经明白地流露出悲观情绪：

“我感到自己的惰性愈来愈大。我不敢肯定，我能不能再这样坚持 10 年。在我看来，似乎（数学的）矿井已经挖得太深了。除非发现新的矿脉，否则迟早势必放弃它。……科学院中几何学的处境，说不定要降到和目前大学里不显眼的阿拉伯语一样。”

达朗贝尔虽然和拉格朗日一样对数学感到悲观，他更为拉格朗日的消沉情绪担忧。在生命的最后时刻，1783 年 9 月，达朗贝尔给自己的挚友寄出最后一封信。他改变以前的告诫：注意休息。这一次他劝老朋友把工作作为治疗精神苦闷的惟一药剂：

“看在上帝的份上，千万别放下工作！这是你最好的药物。再见，或许这是最后一次了。请别忘了世界上最爱你和尊敬你的人。”

不到一个月，拉格朗日最忠实的朋友——达朗贝尔，在巴黎与世长辞了！遵照老朋友生前的忠告，拉格朗日用潜心学习来打发漫漫的长夜，他埋身在浩如烟海的哲学、人类思想进化史、宗教史、语言学、医学和植物学等著作中寻找寄托和慰藉。

但是，“冬天来了，春天还会远吗？”如果说 1788 年法国罕见的严寒，正孕育着 1789 年的法国大革命，那么，由于高斯、柯西、阿贝尔和伽罗瓦等人的革命性创造，数学经过 18 世纪末叶的暂时困难，迎来了光辉灿烂的现代数学的春天！

重新燃起心中的火焰

1789 年，巴黎起义人民进攻巴士底狱的枪声惊破了法国贵族和某些知识界人士的迷梦。王室贵族以及和旧政权有牵连的官吏，大批遭到清洗和镇压。为拉格朗日的安全着想，人们极力劝他离开法国。普鲁士正欢迎他重返柏林。但是，拉格朗日不是偷生怕死之辈。在千载难逢的历史性时刻，他要亲眼看一看这次改造社会的“伟大试验”的结果。他不否认，自己大半生是在王室的庇护下度过的。撒丁国王、腓特烈大帝和路易十六给了他丰厚的待遇和种种荣誉。不过他同样清楚，自己仅仅是他们雇佣的一名劳动者。在他们需要的时候，把他奉为上宾；不需要的时候，就会被一脚踢开。腓特烈对待欧拉的粗暴态度，他记忆犹新。玛丽·安托瓦内特王后的款待，同样不能使他稍感快慰。王后一次宴会的花费超过他一年的开销。他深深同情在死亡线上挣扎的劳动人民，衷心希望他们能赢得做人

的真正权利。汹涌的革命洪流涤荡着封建的污泥浊水，使他无比感奋；大革命的烈火重新燃起他心中的火焰。但是，他毕竟是个书生。当革命政权对反革命分子实行严厉的镇压，特别是某些知识界的知名人士被送上断头台的时候，他感到沮丧。他无法填平血淋淋的阶级斗争的严酷现实和他心目中“完美的”革命之间的鸿沟。的确，共和国在国内外敌人的包围下，对反革命实行毫不留情的镇压，是有其正当的理由，但是要把握好这个“度”，要防止权力被滥用和普通人的权利遭到践踏，出现恐怖统治。革命对敌人的镇压，绝不是对科学的镇压。科学、教育、艺术在共和国关怀下得到飞速发展。为发给拉格朗日“生活津贴”，国民公会专门颁布一道法令。这是共和国对一个公民不同寻常的优待。不过通货膨胀很快使纸币一钱不值。政府委任他到发明委员会兼职，以增加收入。不久又请他去铸币委员会任职。正直的老科学家受到革命政权的充分信任和重视。革命前，法国大学的水平和德国一样糟。新政府决定创建高水平的大学。一所国民公会直属的三年制综合工科学校成立了。这所学校很快成为培养工程技术人才的摇篮。录取的学生要经过严格的考试，并且全部领取国家奖学金。拉普拉斯、蒙日、勒让德等法国最优秀的科学家被请来执教。拉格朗日负责制定数学教程并且担任首席教授。数学作为军事工程训练的一部分而受到极大重视。学校既教授理论，又讲解理论的应用，成为当时和以后各种工程学校和军事学校（包括美国的西点军校）的典范。它培养了像安培、柯西、阿喇戈和盖-吕萨克等19世纪初最著名的科学家。

拉格朗日不辞劳苦地工作。他亲自向基础不好的学生讲课，从算术、代数讲起，一直讲到微积分。他是出类拔萃的教师。陈旧的教材和照本宣科的教学法同他格格不入。在传统的微积分里，无穷大和无穷小向来是学生们学习上的“拦路虎”。为了避免这种困难，拉格朗日在教学中既没有采用莱布尼兹的“无穷小”，也没有采用牛顿的“极限”。他要避开任何几何的直观，把微积分的基本概念直接建立在解析函数概念的形式上。这对澄清100多年来在分析领

域中的混乱，具有重大意义。他的理论后来发表在《解析函数论》和《函数计算教程》中。这两部著作启发和推动了他的学生柯西在30年后建立起比较严密的微积分。

拉格朗日在法国大革命时期最重大的贡献是在建立和完善一种新的度量衡制的工作中发挥主导作用。1873年，国际米制度量衡委员会在巴黎开会的时候，一致公认，米制是“法国革命的一项最伟大的科学事业”。在白金制成的标准米尺中刻着这样令人自豪的名言：

“世界各国万古通用”。

当时，以英国为首的欧洲各国大都采用以十二进制为基础的度量衡制，12英寸等于1英尺；金衡12盎司等于1磅。这种制度和十进位的计算制并存，就好像要把一只六边形的塞子硬塞到一个五边形的孔里，给生产和科学技术带来极大不便。在享有崇高威望的拉格朗日坚持下，委员会坚决主张以10代替12作为度量衡制的基础。可以想像，面对欧洲各国的反对和强大的传统势力，作出这个决定需要有多大的勇气。刚成立的时候，拉普拉斯和拉瓦锡都是度量衡委员会的成员。3个月以后，他们遭到“清洗”。拉格朗日一直担任主席。他感到迷惑不解：

“我不知道为什么留下我。”

他谦虚地没有察觉自己深切关怀人民命运的可贵品质。这种品质不仅保留了他的座位，也保留了他的脑袋。

这样的结束是不错的

正当年轻的共和国在同保王党的叛乱以及同欧洲联军武装干涉的斗争中取得节节胜利的时候，拉格朗日在同孤独和苦闷的搏斗中也传来喜讯：他再度结婚了！新娘是天文学家莱蒙尼的女儿。姑娘被拉格朗日的郁郁寡欢所感动，坚持要嫁给他。抵挡不住年轻女郎火一般的热情，拉格朗日终于屈服。漂亮的妻子不但真诚而且称职。

拉格朗日也心甘情愿地作了许多让步。他陪妻子去参加舞会，到郊外野餐，要是在过去，这是不可想像的。不久，他已经几乎一刻也离不开自己的娇妻。她短时间的离开，即使是到商店去采购东西，都会使他感到难过。他诚实地谈到自己的愿望：

“我第一次结婚没有孩子。我真希望有一个！”

可惜，他没有如愿以偿。

这时候，拉格朗日的声望达到顶峰。拿破仑把这位学识渊博的大学者接到土伊勒里宫①，同他讨论哲学问题和数学在现代国家中的作用。1796 年，法国兼并意大利的皮埃蒙特地区。拉格朗日年迈的父亲当时仍住在这个地区的主要城市都灵。拿破仑特别命令他的大臣在市政厅恭候这位老人，以便告诉他：

“法兰西有幸得到的皮埃蒙特地区，曾经骄傲地诞生了您的儿子。由于他的天才，使全人类都分享到荣耀。”

但是，拉格朗日并没有把自己的荣辱和拿破仑权势的盛衰联系在一起。他晚年一直过着平静的学者生活。到了古稀之年，拉格朗日仍旧夜以继日地工作。可是年岁不饶人。在最后的岁月出现了短暂的昏厥症状。一天上午，妻子发现他人事不省地倒在地板上。在摔倒的时候，头撞在桌腿上受了重伤。拉格朗日深知自己的病情严重，但是毫不惊恐。对于必然的命运，他处之泰然。他照常埋头工作，只是速度被迫放慢。他抓紧时间为《分析力学》第二版进行修改和补充。

得悉他病势垂危，蒙日和其他老朋友都赶来探望。拉格朗日显得十分兴奋。在弥留时刻，他想跟他们谈谈自己的一生：

“我昨天病得很厉害，我的朋友！”他挣扎着支起身子，这样说起话来方便些，“我知道我要死啦。我的身体越来越虚弱。我的智力和体力不知不觉地在消失。我的力气在一点点地耗竭。到达生命

---

① 土伊勒里宫，位于巴黎市中心，大革命中国民公会曾经设在这里，拿破仑称帝以后改做帝宫。

的终点，我没有悲伤，没有遗憾，只有很少一点病痛。哦，死亡并不可怕。当死亡没有痛苦地到来的时候，算不上是项不愉快的最后使命。”

他呼吸急促起来。蒙日扶着他躺下，劝他静静休息。过了一会儿，拉格朗日又睁开眼睛，断断续续地说下去：

“……不要紧。一会儿以后，任何地方都不再活动了。到处都是死。死只是身体的绝对休息。这样，我就可以平静地告别了。……我有过事业；我在数学上赢得过一些声誉；我不恨任何人；我没有做过坏事。这样的结束是不错的，只是我的妻子不愿意……”

朋友们离开以后第二天，1813 年 4 月 10 日凌晨，拉格朗日在一阵昏厥中没有再醒过来，他静卧在床上，好像在享受他一生所期待的休息。



蒙日和傅里叶



(1746—1818) (1768—1830)

要是没有蒙日的几何，19世纪大规模的机器生产恐怕就不会出现。

——埃里克·贝尔①

对自然界的深刻研究是数学最富饶的源泉。

——约瑟夫·傅里叶

传奇式的少年

在法国中东部城镇博讷的西区，有一座简陋的小屋。低矮的大门，一扇小窗，里面黑咕隆咚的，这就是磨刀师傅雅各·蒙日的家。

每天清早，雅各揣着妻子新烘烤的面包，推着一辆小车出门。他顶着烈日，冒着风雨，走街串巷，一边给主顾磨菜刀和剪子，另外还捎带卖些针线烟酒一类的小商品。1746年5月10日傍晚，雅各和平时一样，跑累了一天，推着小车回家。妻子快要分娩了，该不会有什么意外吧。他心里正惦念着，忽听得邻居亚玛大婶扯起嗓子向他喊道：

"雅各大叔，恭喜恭喜，添了个大胖儿子！"

雅各高兴得撂下小车就往家跑。屋子里喜气洋洋，都是来帮忙的热心肠的街坊。雅各蹑手蹑脚来到床前，轻轻揭开临时围起来的

① 埃里克·贝尔（1883-1960）是美国数学家、数学史家，在数论上有所建树，他的《数学家》和数学史著作对数学史研究颇有影响。

床帷：未来的画法几何创造人——嘉斯怕·蒙日，蜷曲着身子，在母亲的怀里甜蜜地睡着了。

雅各一生深受没有文化的痛若，决心不让孩子像自己一样目不识丁。他克勤克俭，把3个儿子都先后送上当地教会办的学院。后来兄弟3人都建立起自己的事业，而老大嘉斯帕更是全家的骄傲。他在学院里囊括所有的一等奖，并且赢得一项罕见的荣誉：把嘉斯帕·蒙日的名字永远镌刻在学校的光荣墙上。

1760年6月的一天，嘉斯帕在图书室里无意中翻到一张抽水机的示意图，旁边还附有一段简单的介绍，说明机械抽水的原理。根据说明，只要上下摇动手柄，就可以把下面的水源源不断地抽上来。这种奇妙的装置一下子把嘉斯帕吸引住了。他决心把它制造出来。可是，既没有实际模型，又没有成年人指导，一个14岁的孩子要制作一部结构复杂的抽水机，真是谈何容易。不过，这吓不倒嘉斯帕。他一旦下了决心，再大的困难也挡不住。一放学，他就一头扎到杂物间里。那里有锯子、斧头等各种工具，还有一大堆木头可以供他大显身手。那一年，博讷久旱不雨。庄稼枯焦，土地龟裂，天气热得冒烟。杂物间没有窗，只开了一个小洞，更是闷热难忍。嘉斯帕好像对炎热毫不在意。制作中他遇到一个又一个比炎热大得多的困难。这同样吓不倒他。失败了，就找一找原因再干，真不知度过了多少个不眠之夜。夜晚是这样宁静，皎洁的月亮在向他微笑，星星眨巴着眼睛在轻轻地安慰他。哦，有啦，答案找到啦！嘉斯帕倏地翻身下床，光着脚，又来到院子里干了起来。

机器奇迹般地制造出来了。两个弟弟二话不说，用绳子把抽水机一捆，抬到离家1公里开外的湖边。可是，当他们把抽水机往地上一放，两人的心也跟着往下沉。平日碧波荡漾的小湖快见底了。一台小小的机器要把水抽得这么高，简直不敢想像。可是，跟在后面的嘉斯帕不慌不忙，胸有成竹。他坚信机械抽水的原理，也不怀疑自己制作的技艺。他把一切安排停当，就光着膀子摇动起手柄，一下，两下，三下，……大弟弟走过来拉住哥哥的手说：

"嘉斯帕，算了吧，别白费力气啦！"

话音未落，他一下子怔住了。湖水，清清的湖水，从管子里流了出来！手柄摇动得愈来愈快，断断续续的细流变成粗大的水柱。两个弟弟兴奋得索性把头伸进来让整个身子浇个湿透。抽水机成功的消息，像风一样传遍博讷城。四面八方的人群把抽水机围得水泄不通。他们好奇地瞧着那不可思议的机器，瞧着清澈的湖水汩汩地流进干裂的土地。而最令人难以置信的是，摸索和制造这台机器的竟是一个 14 岁的少年！父亲雅各高兴地捋捋胡子，笑了。祖祖辈辈大字不识的蒙日家，终于出了个秀才。在回答惊讶的观众提出的问题的时候，嘉斯帕说得很简单：

"我的成功只依靠两条。一条是毫不动摇地坚持到底；一条是用手把脑子里想出的图形一丝不差地制造出来。"

身体力行，坚持到底——这正是蒙日一生从事科学和社会活动的真实写照。

两年以后，嘉斯帕决定在毕业前夕送给亲爱的母校一件礼物——一张从来没有人绘制过的全博讷地图。当他想到在校长办公室的墙壁上挂起自己画的博讷地图，不由得笑了起来。然而要画一张城镇地图，别说是在 200 多年前蒙日的时代，即使在今天，也是一项复杂而艰巨的工作。虽说有时候可以请两个弟弟帮忙拉线、立标竿，但是嘉斯帕一个人既要测量，又要绘图，就连测量的工具和仪器，哪一件不要靠自己来动手设计制造。不过这算不了什么。抽水机的成功锻炼了他的能力，也增强了他的信念：有志者事竟成嘛！这一年的夏天又是热得出奇。老天爷好像为了考验蒙日的决心，把地面烤得烫脚。顶着烈日，蒙日挥汗如雨。但是他的头脑准确而且冷静。博讷的每一条街道，每一间房屋，甚至连街灯和街头的饮水处，也都一一准确无误地画进了他的地图。博讷又一次轰动了！嘉斯帕·蒙日成了远近闻名的传奇式的少年。

不速之客

嘉斯帕以最优秀成绩从学院毕业。老师们特别推荐他到里昂由同一个教会主办的学院去担任物理教师。

1762年10月，法国东南部的秋天温暖如春，景色宜人。仪表堂堂的蒙日给里昂的学院带来了喜悦和生气。师生们喜爱他豪爽的性格和潇洒的风度，钦佩他办事干练和精力充沛，更为他渊博的知识和超群的才华所倾倒。老校长从来没有遇到过这样出类拔萃的教师，心里有说不出的喜欢，千方百计想“拴住”他。老校长应允，如果蒙日立誓永远留下来，学校愿意从现在起把他的薪金增加一倍。这无疑是个诱人的条件。要是自己有了双薪，年迈的父亲就不需要顶风冒雨地每天为生活奔波了。他满心喜悦地回家去和父亲商量。谁知雅各听到儿子带来的消息，半晌不说话。一个16岁的孩子能替自己挑起家庭重担，他怎不感到由衷的欣慰？但是他了解儿子的才能。如果让嘉斯帕立下终身契约，就等于捆住他的手脚。自己有再大的困难，怎么能耽误儿子的前程呢？想到这里，雅各亲切地对嘉斯帕说：

“孩子，你不用为我操心。你看，我的身体还很壮实，足足可以再干一二十年呢！”

几天以后，有人来敲蒙日家的门，开门一看，是位长满络腮胡子的军官，后面还跟着一名侍从。雅各的家里从来没有光临过这么尊贵的客人，莫不是走错了地方？军官看清雅各心中的疑问，赶忙向老人请安，并且说明来意：想聘请他的儿子到法国东北部边境地区城市梅济耶尔军事学校去教书。

原来，这位军官是梅济耶尔军事学校的负责人。他和嘉斯帕母校的校长是老朋友。他出差路过博讷，顺路来看望多年不见的好友。在校长办公室里，他意外地看到嘉斯帕的杰作：一张精致的博讷地图，不禁心中大喜。梅济耶尔学校里正亟须一名测量学和绘图教师。

他决定中断旅行来做雅各的工作。凭着他如簧的巧舌，把远在法国-比利时边境的梅济耶尔描绘得天堂一般，到底说动了雅各。狡黠的军官隐瞒了一个事实：由于蒙日出身低微，他永远不能升为军官。

从18世纪后期开始的法国数学的繁荣时期，同军事学校有密切的联系。商业上和殖民地的争夺，宗教和王室间的世仇，使欧洲危机四伏，烽火连天。各种军事学校应运而生。数学作为军事工程训练的一部分而受到重视。拉格朗日的科学生涯开始于都灵炮兵学校，拉普拉斯在博蒙军事学校，勒让德在巴黎，而蒙日是在梅济耶尔。其实，用我们今天的标准来衡量，当时的梅济耶尔军事学校不过是一个小小的培训班。全校只有5位教师，20名学生，学制一年。每年有10名学生毕业以后充当技术军官，其余的因为出身贫微，只能干些杂活。蒙日揣着介绍信一个人在梅济耶尔东问西找，好半天才找到那位军官所说的“天堂”：两棵老态龙钟的枫树陪伴着一幢孤零零的二层楼房。只有彩蝶在花丛草坪上忙碌地飞来飞去，整个校园里空无一人。冷冷清清的校园给满腔热情的蒙日当头泼了一瓢冷水。蒙日是个乐观主义者。环境固然重要，他更相信自己的力量。在博讷，在里昂，自己干得这样出色，为什么在梅济耶尔不能干出一番轰轰烈烈的事业？说到头，他的确挺喜欢他的新工作。这里环境幽静，而且教授测量和绘图使他有大量时间来研究数学。1768年，蒙日晋升为数学教授，他这时才22岁。3年以后，一位物理学教授去世，蒙日又接过他的工作，一个人承担两个人以至三个人的工作，对他来说算不了什么。他的体格和他的思想一样坚强。

在学校设置的课程中，设防阵地的构筑理论是一项重要内容。它研究怎样使阵地的各个部位不致被敌人的炮火直接命中。蒙日发觉，这类设计通常需要浩繁的计算，有时还要进行反复试验，造了拆，拆了造，简直像一场噩梦。学生们学起来叫苦不迭，教师们讲解起来也深感头痛。蒙日决心改变这种状况。他很快找到问题的症结：由于阵地有上下，前后和左右3个方向，是立体的，可是设计的图纸是个平面，不能把阵地的构造充分表示出来，这就造成教和

学的巨大困难。因此，出路就在于，怎样在图纸平面上准确而清晰地反映出阵地的各个方面。这个问题几个月来像影子一样缠着蒙日。他坐不住了，戴起帽子来到街上。5月的梅济耶尔，阳光明媚。一幢幢楼房，红的，灰的，黄的，白的，鳞次栉比。有的精巧雅致，有的庄重朴实，真是千姿百态，美不胜收。不用说，它们都是立体的。迎面驶来一辆马车，领头的一匹白马昂首扬蹄，腾空欲飞。你看，马车里怀抱着婴儿的年轻母亲笑得多么甜蜜！立体，立体，到处都是立体，…… 一位修女朝蒙日走来。她白皙的皮肤，一双忧郁



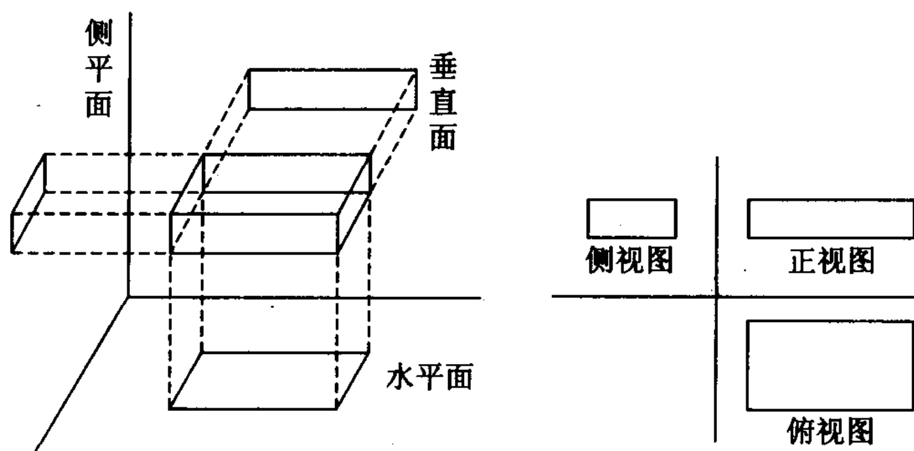
“为什么要出家当修女呢?”

的眼睛，头上包着修女特有的头巾，上面披了一条面纱。一位年轻漂亮的女子，为什么要出家当修女呢？……猛然间，蒙日站住了。灵感像一道闪电从他的脑海中闪过。啊，有了！有办法了！他激动得摘下自己的帽子在头上猛烈地挥舞着，连跳带跑地往回奔去。行人们都停下来惊讶地瞧着这个奇怪的青年。一个老太婆忙不迭地在胸前划起十字，嗫嚅着：

“天哪，一个好端端的青年，竟是个疯子。上帝保佑他吧！”

军事机密

蒙日当然没有发疯。不过，他毕竟和别人有所不同：他能看到隐藏在平凡的表面现象后面的伟大真理。一位修女的打扮，对一般人来说，真是见多不怪，早已经“熟视无睹”。可是在有心人蒙日的眼里，却有惊人的发现。修女的脸庞只露出正面，人们只能看到她的眉毛、眼睛、鼻子和嘴。如果要看清她的头型、耳朵形状、鼻子和嘴唇侧面的轮廓，那就要站到她的侧面并且揭开她两边的头巾和面纱。虽然我们从正面和侧面所看到的都只是一个“片面”，蒙日发现，如果把这些片面有机地组合起来，就不难得到修女整个脸庞完整而清晰的印象。画法几何的基本思想就这么简单！比如要画一块砖头，只要把它放在三个互相垂直的平面前面。我们从前方、上方和侧面去观察它，分别可以看到三个各不相同的长方形。从前方看到的图形叫正视图；从上方和侧面看到的是俯视图和侧视图（如下左图）。用剪刀把侧平面和水平面的交线沿虚线剪开，然后分别把它们折转到和垂直面同一个平面上，就得到一张砖头在平面上的“三视图”（如下右图）。砖头各个侧面的大小和形状，人们可以在这张“三视图”上一目了然。这是一种多么简单而又巧妙的方法！研究空间形体在各个视图的形状和位置关系的新学科——画法几何诞生了。有了这种描写复杂几何形体的好方法，也使军事工程和机械设计发生了一场伟大革命。通向大规模机器生产的道路打通



了！

一天，蒙日给学校送来一份有关防御阵地设计的完备解答。他利用作图的方法，不要任何繁杂的计算就能解决问题。论文最后转呈上级军官审查。不料这位上司根本不相信这样复杂的问题竟能够轻易地得到解决。

“简直是开玩笑。既然作者本人嫌麻烦，不愿作计算，我干嘛去自找麻烦？计算上可能有捷径，但不会有奇迹！”

上司原封不动地把这篇创造奇迹的论文退了回来。

蒙日毫不示弱。他坚持说，自己的方法完全正确，真的不需要什么计算。他要求对他的方法给予严格的审查，不妨用计算来加以验证。蒙日终于胜利了。计算结果证明，他的答案完全正确！

这就是画法几何的开端。蒙日立刻得到一个机会，向未来的军事工程师讲授这种新方法。陆军大臣授予他荣誉勋章和巨额奖金，但是附加一个条件：不得泄露他的新方法。这样，画法几何作为一项重大的军事机密被足足保密了 15 年。法国大革命以后，1794 年，蒙日在巴黎高等师范学校第一次公开开设这门课程，对于军事和生产具有巨大价值的画法几何才得到广泛的传播。

巧结良缘

1776年圣马丁节的晚上，蒙日应邀参加梅济耶尔行政长官举行的招待会。官邸门前车水马龙，门庭若市。整个城市沉浸在欢乐的节日气氛中。蒙日静静地坐在大厅的角落里喝着甜酒。远处传来悠扬的乐声，一位钢琴家正在演奏德国作曲家巴赫的奏鸣曲，使节日更增添庄严的宗教气氛。突然，美妙的琴声被刺耳的尖叫声打断。一个满脸粉刺的花花公子在肆意侮辱一位寡妇，因为她不愿和他相好。看到围观的人群都竖起耳朵表示出极大的兴趣，他就添油加醋，愈说愈起劲。脏话随着唾沫像连珠炮一样从他的嘴里喷出来。蒙日怒不可遏。他推开人群，挤到里面想弄清楚是不是自己听错了。

"你这下流胚！"蒙日说着就对着他的下颏猛击一拳。

对方捂着脸，悻悻离去，不敢提出决斗。

第二年春天，在另一次招待会上，蒙日遇见一位美艳绝伦的少妇。一经介绍才知道，原来她就是上次蒙日为她解围的霍波女士。这时她才芳龄二十。蒙日当即向她求婚。由于前夫的事务还没有处理完毕，她有点犹豫。

"不用担心，亲爱的，"蒙日安慰她，"我解决过比这棘手得多的难题呢。"

夏天，霍波和蒙日在梅济耶尔举行婚礼。丈夫成了她的偶像。霍波比蒙日活得更长，总想做些使她丈夫流芳千古的事情。其实，这完全没有必要。早在和她相识以前，蒙日就已经为自己牢牢地树起不朽的丰碑。

这时候，达朗贝尔和孔多塞①正在巴黎四处奔走，说服政府建立一个水力学研究机构，并且推荐蒙日负责这项工作。1780年，水

---

① 孔多塞（1743-1794）是法国数学家、革命家，哲学家，他关于人类能够无限地完善自身的进步观念对19世纪的哲学和社会学具有极大影响。作为一个吉伦特党人，在罗伯斯比尔（1758-1794）执政期间，于1794年3月27日晚被捕，两天以后死于狱中。

力学研究所在巴黎正式成立。梅济耶尔军事学校不愿意把自己的"顶梁柱"轻易放走。蒙日只好一半时间在巴黎进行研究，一半时间在梅济耶尔讲课。直到3年以后，政府任命他担任海军军官候选生的考试委员，他才摆脱在梅济耶尔的工作。

铁面无私的蒙日来到海军部工作，对许多贵族子弟来说是场不折不扣的灾难。他们本来可以不费吹灰之力搞到一个海军军官的头衔，穿起令人眼红的军官制服，在大街上耀武扬威。现在，这个平民出身的考试委员对他们毫不买账。他不留情面地刷掉一切不合格的贵族子弟，不管他们有多么显赫的门第。贵族老爷们把他恨得咬牙切齿，扬言要进行报复。妻子吓得苦苦劝他小心从事。蒙日毫不妥协。要他做违心的事，绝对办不到。他斩钉截铁地回答他们：

"如果你们不喜欢我这样干，可以另请高明！"

蒙日的贫苦出身和他同贵族打交道的经历，使他成为一名革命者。他亲眼目睹大批农民由于不堪领主骇人听闻的剥削和压迫，背井离乡，四出逃亡。全国土地荒芜，饿殍遍野。可是凡尔赛照常天天举行盛会华宴、狩猎舞会。社会的腐败，经济的衰落，廷臣的穷奢极欲和老百姓的痛苦绝望，构成法国现实的悲惨画面。蒙日预感到，一场革命的暴风雨即将来临！

在革命的洪流中

巴士底狱的枪声揭开了法国大革命的序幕。蒙日满腔热情地投身于革命的洪流。1792年，国民公会推选蒙日任海军和殖民地部部长。担任部长，蒙日无疑是适当的人选。不过在激烈动荡的1792年，这实在是一项极端困难的任务。果然干了不到半年，蒙日就提出辞呈，因为有人指责他还不够激进。可是5天以后，他又重新当选。形势瞬息万变。正常的工作很难开展，而且，言谈或行动上稍一不慎，还随时有被送上断头台的危险。不过，蒙日不是胆小鬼。他大力整顿混乱的局面，严厉批评办事拖拉和质量低劣。他不能容

忍无能和无知。个人的安危他并不担心，使他忧虑的是，国内的混乱将为外国人侵大开方便之门。如果这样，革命的成果将毁于一旦。

1793年1月21日，天空阴沉，冷风砭骨。巴黎市中心的革命广场，人山人海，旗帜如林，呈现在人们面前的，是激动人心的历史性场面，在被推倒的路易十五的塑像旁边，罪恶累累的路易十六在断头台下身首异处。消息传来，欧洲的专制政体和贵族政治激起歇斯底里的狂怒。英国、荷兰、西班牙伙同撒丁、普鲁士和奥地利等国，联合向年轻的法兰西共和国发起疯狂的进攻。法兰西在危急中。1793年4月10日，蒙日获准辞职，去从事一项更紧迫的任务——领导和组织全国的军火生产。为了保卫革命，国民公会征集了90万名新兵。他们把军火库存一扫而空。军需品只够需要量的十分之一，而要进口铜、锡、硝和钢铁等制造青铜大炮、火药和钢枪所必需的材料，完全无望。在武装到牙齿的敌人进攻面前，手无寸铁的保卫者将会遭到什么样的命运，蒙日连想也不敢想。他辗转反侧，夜不成眠。这位解决困难的能手遇到有生以来最大的难题。

奇迹又一次在他的手中出现。一天，双眼熬得通红的蒙日向国民公会激动地宣布：

"有救啦，公民们！救星就是我们足下的土地。土壤会给我们取之不尽、用之不竭的硝。3天以内，我们就可以制造出炸药来装备枪炮！"他那由于连日操劳而完全嘶哑的声音，就像一颗重磅炸弹震动整个会议大厅。过了好一会儿才有一位代表提出疑问：

"说来倒是中听，可是怎样把硝从土壤里提炼出来呢？"

这不难。大家眼看蒙日和他的好友、法国化学家贝托莱搬来一口大锅，从盐碱地里挖了满满一筐土，两人卷起袖子，就在议会大厅里给大家演示炼硝的方法。全国动员起来了！在蒙日领导下，一期期简报发到全国城镇、村庄，指导老百姓怎样根据当地的条件来炼硝。群众的爱国热情空前高涨。他们在街头、广场和田边不分昼夜地劳动着。硝的产量一下子增加10倍。贝托莱带领化学家发明了一种新方法，把民间提炼的粗硝进一步精炼，并且简化火药的制造

过程。为了得到急需的铜和锡，共和国号召群众，把教堂的钟和家里的时钟捐献出来。全国成了一座巨大的军火工厂，而蒙日是整个活动的指挥。他白天到工厂视察，解决难题，晚上撰写指导各地生产的简报。他的《大炮的生产艺术》等有关论著成了工厂技术人员必读的手册。

捷报频频传来。在同仇敌忾的革命军民的铁拳下，欧洲反动联军和国内封建势力节节败退。不幸，随之而来的不是革命和建设事业的胜利发展，而是革命营垒各个派别的内讧，以及国内恐怖浪潮的急剧高涨。1794 年夏天，国民公会通过《惩治人民之敌》法令。根据这个法令，取消了预审被告的程序；革命法庭无需证人作证，只要根据“内心确信”就可以确定被告是否有罪，而对一切危害共和国的罪行，只规定一种惩罚——死刑。恩格斯批评 1794 年夏天的这种恐怖浪潮“完全是多余的”，因为它只能失去群众对革命的支持。

一天，霍波从市场买菜回来，在路上听到有人在议论她的丈夫和贝托莱。她顾不得手上还挎着篮子，急忙奔到皇宫花园去了解真相。贝托莱正安静地坐在栗子树下。是的，他一星期以前就已经听到这种议论。不过他当时还不相信。

“这样，”他以特有的镇静补充道，“我们肯定要被逮捕、审讯、谴责，然后处决。”

丈夫晚上回到家里，霍波把贝托莱的预言告诉他。蒙日的震惊可想而知：正当自己竭尽全力增加军火生产来对付共和国敌人的时候，自己却被指责为共和国的敌人！

“真见鬼，”蒙日恼怒地说，“这一切我都被蒙在鼓里。我光知道大炮工厂的进展神速！”

不久，公民蒙日遭到他住所看门人的指责。指责背后的含义，蒙日和指责者都同样清楚。他不得不悄悄地离开巴黎，等待着风暴过去。

拿破仑的好友

“一位年轻的炮兵军官，在1792年荣幸地接到过海军部长阁下写来的一封热情洋溢的欢迎信。对此，请接受他对您诚挚的谢意。他一直保留着这一珍贵的回忆。您知道，这位军官现时是远征意大利军总司令；他极为愉快地向您表示赞赏和友好的情谊。”

这封来信开始了蒙日和拿破仑长期亲密的友谊，也揭开了蒙日事业的新阶段。

身为法国驻意大利远征军总司令的拿破仑·波拿巴这时才27岁。他读过法国启蒙思想家卢梭的书，在一个时期曾经和大革命的风云人物罗伯斯比尔有过联系。他装出对革命同情的姿态来赢得人民的信任。作为科西嘉岛来的炮兵军官，他在1792年以大胆的战略把英国人逐出法国南部重要军港土伦。后来又在巴黎街道上用大炮镇压骚乱，保卫了国民公会。从此他平步青云，官运亨通。蒙日和拿破仑在动荡的1792年匆匆见过一面，那时候，拿破仑刚从土伦前线载誉归来。饱受革命内部激烈争吵和互相残杀痛苦的蒙日，把这颗从革命动乱中升起的灿烂的军事明星看成了革命的救星。他以为有拿破仑的坚强领导，法国大革命的目标就有实现的希望。真诚的蒙日哪里想到，野心勃勃的拿破仑正是利用群众的这种心理，接过革命的口号，用“不断的战争来代替不断的革命”，抓住一切机会攫取至高无上的权力。不到10年，拿破仑成了法国的独裁者；接着，他又极力想使自己成为欧洲的主宰。

拿破仑信中提到的“赞赏”不是一句客套话。督政府很快任命蒙日和贝托莱到意大利挑选当地“赠送”的绘画、雕刻和其他艺术珍品。这是意大利对拿破仑入侵时所受损失的“补偿”。蒙日对艺术品的鉴赏开始发生兴趣并且成为专家。但是这批沾满意大利人民血迹的不义之财使蒙日内心不安。运到法国的“战利品”已经足够装备好几个巴黎最大的卢浮宫博物馆。他决心劝拿破仑克制行事：

“无论为了意大利人的利益还是征服者掠夺的需要，都不应该这样胡来。”

拿破仑权衡得失，接受了蒙日的忠告。

蒙日和拿破仑做了亲密的好朋友。如果说拿破仑曾经得到过别人无私而持久的友谊，那么这个人就是嘉斯帕·蒙日。拿破仑当然也没有忘记，在自己的晋升过程中，蒙日出过一把力。蒙日欣赏这位统帅亲切的幽默和出神入化的指挥艺术；而拿破仑钦佩这位大学者睿智的见解和渊博的知识。他俩一起来到意大利北部乌达附近的别墅小憩。法军在意大利的军事行动已经圆满结束，正挥戈东征，越过阿尔卑斯山，直逼维也纳。拿破仑踌躇满志，洋洋自得。每次宴会，他命令乐队高奏《马赛曲》，因为蒙日最喜欢这首雄壮的战歌。可不是嘛，在坐下就餐以前，蒙日总要和着乐曲，引吭高歌：

团结起来，祖国的儿孙们，

为了光荣的日子到来！

………………

回到巴黎，蒙日出任新建的巴黎综合工科学校校长。他呕心沥血，为学校的建设发挥了不可估量的作用。他延聘法国最好的科学家前来执教；实行法国启蒙思想家们极力倡导的理论与实践相结合的教学原则；对学生进行严格的考试挑选。在蒙日领导下，巴黎综合工科学校很快成为法国工程师的摇篮，为法国、为全世界培养出许多第一流的科学家。

1804年，拿破仑·波拿巴登上皇帝宝座，号称拿破仑一世。巴黎综合工科学校的大学生们群情激奋，纷纷举行街头集会，抗议恢复帝制。拿破仑大为恼火。他把蒙日召进宫来责问：

“好啊，蒙日，你的学生都起来反对我啦。他们坚决声称自己是我的敌人！”

在拿破仑发怒的时候，敢于当面向他直陈反对意见的人，在法国屈指可数，而蒙日无疑是其中的一个。

“陛下，”蒙日冷静地反问道，“我们费了很大力气使他们成为

共和主义者，可是在一个早晨，却突然又要他们成为帝制主义者，这怎么做得到呢？而且，恕我直言，陛下的转变是不是太激烈啦？”

怒气冲冲的拿破仑被说得哑口无言。巴黎综合工科学校避免了一场灾难。后来，蒙日多次以他冷静而成熟的意见，制止过拿破仑粗暴的镇压。

真羡慕你啊，我亲爱的同事

同拿破仑的亲密交往和繁重的行政事务没有遏止蒙日的创造热情。他始终朝气蓬勃，精力过人，不倦地进行创造性的研究。归根结底，蒙日是一位数学家，更确切地说，是一位几何学家。他的几何研究和对几何学的热情，在他的学生中激起复兴纯粹几何学的强烈愿望。从此以后，几何学进入了生气勃勃的中兴时期。

牛顿和莱布尼兹在17世纪创立的微积分，统治了整个18世纪。它的方法通用而一致，它的结果具有无与伦比的普遍性。数学家们无不为分析的辉煌胜利欣喜若狂。相反，繁荣了2000多年的综合几何学却降低到不起眼的位置，被人们冷落地撇到一边。因为它的办法完全依靠使用者的聪明才智，它的结果常常局限于所考虑的特定图形。

但是，优美而直观的几何方法总使一些人难以忘怀。尤其对于某些特殊的问题，由于它内在的清晰和解法的优美，它能解决分析方法所不能克服的困难。即使像拉格朗日这样地地道道的分析学家也坦率地承认，在这类问题中，“代数的分析有点不够用。似乎只有综合的方法才能奏效”。他举出求旋转椭球体对它表面或内部一点（单位质量）的引力这个令人望而生畏的难题为例，英国卓越的数学家马克劳林（1698-1746）曾经用综合的方法解决过。蒙日决心改变几何学被不公平、不明智地轻视的局面，把几何学作为对分析有启发性的途径和分析结果形象化的解释，带回到数学的领地。他把几何方法提高到和分析方法同等重要的地位。蒙日的努力使濒临

绝境的几何学获得新生。

1805 年，有关微分几何[①]的第一部著作《分析在几何中的应用》问世。这部著作从开始写作到最后出版，蒙日整整花了 35 年时间。他巧妙地利用微积分来研究曲面的曲率，取得巨大的进展。他的曲面理论为高斯扫清道路；高斯的工作鼓舞了黎曼；而黎曼由此发展出黎曼几何，成为爱因斯坦相对论的数学基础。拉格朗日公正地指出：

“由于蒙日把分析应用于几何学，这位精力旺盛的学者将名垂千古。”

蒙日关于微分方程的出色研究，同样和几何中的曲线和曲面密切相关。这证明蒙日是地道的几何学家。在他看来，分析和几何是相辅相成的同一个课题。他把问题的几何方面同分析方面统一起来考虑，而对这个世纪的其他数学家来说，分析和几何是两个分离的分支，只不过它们有某些“接触点”而已。在他的影响下，几何学在巴黎综合工科学校得到蓬勃发展。蒙日的最有创造性的学生彭赛列（1788-1867），受到他的启发，后来成为在数学和其他科学技术上有广泛应用的射影几何的创立者。

蒙日在学术上的贡献远远超出数学领域。他在物理学、化学、冶金学、机械学和武器设计等方面都有杰出的成就。有一次，蒙日应学生的要求，向他们介绍自己的发明成果。拉格朗日也是其中的一位热心听众。会后，拉格朗日诚挚地对他说：

“真羡慕你啊，我亲爱的同事！您居然做出这么多第一流的成果。要是我能做出来该有多好！”

现在，我知道我将怎样病死

拿破仑当了皇帝，蒙日的荣誉纷至沓来。可是，在前面等待着

① 微分几何是利用数学分析和代数研究几何图形局部和整体性质的数学一大分支，对整个数学、理论物理和工程技术都有重大作用。

的，不是他日夜盼望的“光荣的日子”，而是法军在莫斯科大溃退。

1812 年 5 月，拿破仑纠集 50 万军队大举进犯俄国。蒙日因为年近古稀，无法跟随拿破仑远征，只好留在国内乡村别墅，通过官方公报来了解大军的进展。一开始，军事行动异常顺利。法军所向披靡，直捣莫斯科。蒙日欣喜地计算着拿破仑凯旋归来的日子。一天早晨，蒙日从外面散步回来，满头大汗的信使送来一份《第 29 号公报》。蒙日打开一看，立刻怔住了。他无法相信，无敌的拿破仑竟会遭到这样的惨败。不会是做梦吧？他使劲地揉揉眼睛，搔搔自己的头发。一点不错。这分明是现实，不是梦境。再一看，公报上的黑字赫然写着：

“……撤离莫斯科，……损失重大，……”

突然，这些字飞快地转动起来、脑袋嗡嗡直响，眼前一阵发黑，……

中风病康复后，一向身强力壮的蒙日沮丧地说：

“以前，我不知道。现在，我知道我将怎样病死。”

不可一世的拿破仑被迫退位。“树倒猢狲散”。昔日拿破仑的座上客，摇身一变，争先恐后地当上波旁王朝的红人。蒙日不愿卖身求荣。作为大革命时期的部长和“科西嘉暴发户”[①] 的宠臣，蒙日的脑袋成了波旁王朝刻意搜索的目标。他颠沛流离，拖着多病的身子，蹒跚地从一个贫民窟转移到另一个贫民窟。当局下令把他开除出科学院，企图剥夺他不朽的荣誉，尽管它的赢得同“慷慨的”拿破仑毫不相干。同时被下令驱逐的，还有在大革命时期为击退欧洲反动联军作出过卓越贡献的“胜利的组织者”——民族英雄拉扎尔·卡诺[②]。院士们忍气吞声地屈从了。

最后的日子，蒙日在 6 年以前就预见到了：中风病突然发作。经过长时间的昏迷，1818 年 7 月 28 日，这位 18 世纪伟大的数学家

---

① 由于拿破仑出身平民，生于科西嘉岛，所以保皇党称他是“科西嘉暴发户”。

② 拉扎尔·卡诺(1755-1823) 是法国数学家，研究主要在数学分析和几何学方面，对射影几何学有重要贡献。他是热学家尼古拉·卡诺（1796-1832）的父亲。

和社会活动家的心脏停止了跳动。巴黎综合工科学校的师生们要求参加葬礼。敬爱的老校长是大学生心中的偶像。国王断然拒绝他们的要求。师生们礼貌地不违抗禁令。但是他们比院士们更有勇气而且机灵。路易十八的命令只禁止他们出席葬礼。安葬的第二天，巴黎综合工科学校的师生们排起庄严肃穆的队伍走向公墓，在他们的导师和朋友——嘉斯帕·蒙日的墓前献上花圈，表示深深的怀念和敬意。

拿破仑的另一位朋友

蒙日是拿破仑惟一可以引以自豪的最忠实的好友。他在学术界的其他朋友就没有这样忠诚了。朝三暮四的拉普拉斯不但被他痛骂一顿，也遭到许多人的嘲笑。可是对脾气暴躁的另一位数学家——傅里叶，却难得有人提到。

让-巴蒂斯特-约瑟夫·傅里叶于1768年3月21日诞生于法国中部城镇、塞纳省省会欧克塞尔。父亲是个裁缝师傅。8岁那年，父母亲双双病亡，一位热心慈善事业的老太太收养了他。4年以后，老太太把他托付给欧克塞尔的主教，由主教把他送到由本笃会①主办的当地一所军事学校学习。傅里叶的才能很快显示出来，特别是他的作文受到全校老师的交口赞誉。他的文章是那样的雄辩和富有鼓动性，以致巴黎重要教堂的高级传教士纷纷请他来撰写布道文。可是，谁能够相信他还只是一个乳臭未干的12岁孩子呢！不过，他的刚愎任性、急躁易怒的性格也使人头痛。尤其是他惯于恶作剧，谁见了都要防他三分。一次偶然的机会，他接触到了数学。神奇的数学世界使他忘记周围的一切。他变得沉默寡言，常常若有所思。他把厨房和各个角落里的蜡烛头都小心地收集起来。到了晚上，在

① 本笃会是天主教一批修会的联合组织。6世纪初意大利人圣本笃（约480-547）建立最早的修会，以后本笃会隐修院逐渐成为欧洲主要经籍研究和学术中心。

别人熟睡以后，就一个人躲在紧靠壁炉的窗帘后面埋头学习。

傅里叶 19 岁从军事学校毕业。他从小梦想成为一名军官。可是他的贫微出身使他的梦想无法实现。本笃会乘机劝他从事神职工作，于是他在圣·伯努瓦教堂当上了见习修行生。幸好在正式宣誓成为教士以前，法国大革命把他从修道院解脱出来。他的老朋友深知他的数学天才，把他从修道院接到欧克塞尔军事学校担任数学教授。在学校，傅里叶多方面的才能得到充分发挥。要是他的同事病了，他就主动去代课。从物理学到古典文学他都能愉快胜任，而且，他还比原来的老师教得好呢！

1789 年 12 月，傅里叶来到巴黎向科学院提交他的处女作《论数字方程的解》。这个成果超过了拉格朗日，直到今天仍有价值。它可以在任何一本论方程理论的基本教材中找到。我们在这里不再赘述，因为和他在数学物理上的成就相比，就显得无足轻重了。不过解方程从此成为他一生感兴趣的课题。

巴黎的革命气氛深深感染了傅里叶。回到欧克塞尔，他上街参加群众集会，到处发表演说，号召群众参加革命。大革命涤荡一切封建的污泥浊水大大振奋他的精神，可是随之而来的革命恐怖不能不使他痛心疾首。大批知名的科学家不是流亡国外，就是被关进死囚护送车。科学在不断升级的恐怖浪潮中挣扎。傅里叶不顾个人安危，大声疾呼反对不必要的残暴。可是，一个普通知识分子的呐喊，起得了多大作用呢？

这时，一颗灿烂的明星正从法国冉冉升起，他就是科西嘉岛来的青年炮兵军官拿破仑·波拿巴。拿破仑认识到，无知除了破坏，什么也不能创造。要保卫革命成果，粉碎封建复辟势力的反扑，必须有一批训练有素的专业人才。国民学校在各地纷纷建立起来了。但是教师在哪里呢？迫切需要训练一支 1500 人的教师队伍。1794 年，巴黎高等师范学校创立了。傅里叶应召从欧克塞尔来巴黎任数学教授。第二年，他又和蒙日在刚创建的巴黎综合工科学校共事。

为革除旧大学年复一年地重复已故的教授们干巴巴的讲稿，国

民公会号召在数学教学上进行创新：禁止在上课的时候携带讲稿；不能有气无力地坐在讲台桌后面念讲稿，要站着讲课；提倡师生间在课堂上开展活跃的对话，但是要防止它变成毫无成果的争论。法国数学教学的新时期开始了。它的成功导致法国历史上数学和科学最光辉灿烂时期的到来。无论在巴黎高等师范学校还是巴黎综合工科学校，傅里叶表现了教学上的巨大才华。他吸收历史上的成功经验，并且把数学的抽象性巧妙地和它有趣的应用结合起来，使讲课生动活泼，深受欢迎。

1798 年，傅里叶和蒙日一起，追随拿破仑远征埃及。不久，由于法国在欧洲军事上节节败退，国内人民的不满日益增长；督政府威信一落千丈。为摆脱困境，大资产阶级寄希望于强大的军事独裁。这个独裁者最适当的人选莫过于拿破仑·波拿巴。1799 年 8 月，拿破仑由蒙日等几名亲信陪同，乘快速炮艇秘密回国。傅里叶和大批法国士兵被甩在埃及。他们一边要防范被愤怒的埃及人割断喉管，一边忍受着烈日的煎熬。沙漠的天气是吓人的。白天，火焰般的太阳烤得皮肤烧灼一样疼痛，心脏剧烈跳动，血不断往上涌，头晕目眩，人热得几乎要发疯。可是太阳一落，立刻就清风习习，凉爽宜人了。到了晚上，要是不穿上厚衣服，就要被冻得牙齿打颤。不过，埃及的酷热并没有吓倒傅里叶；相反，他对这种热现象发生强烈的兴趣。当然，使他对热流感兴趣的，还有更为深刻的原因：为了金属更加坚韧，使金属快速冷却的热处理工艺开始受到人们的重视；而地球深处的温度是又一个长期引起人们争论的问题。

1801 年，傅里叶返回法国，任法国南部伊泽尔行政区行政长官，首府设在格勒诺布尔。他指导从沼泽地排水，消灭疟疾，普及教育，使伊泽尔地区摆脱中世纪的愚昧和落后。他在担任行政工作的同时，继续在埃及开始的热传导的数学理论研究。在解决两端温度保持不变、侧面绝热的圆柱棒热传导问题的时候，他得到一个偏微分方程。解这个方程，就遇到把一个函数表示为三角级数的问题。经过简短的分析，他断言任何定义在 $(-\pi, \pi)$ 上的函数都可以

表示为三角级数。这个结论虽然过于乐观和夸大，不过，的确有相当广泛的一类函数满足这个结论。这类函数在声学、光学、电动力学、热力学等领域大量存在。因此，把函数展成三角级数成为数学物理问题中有普遍意义的方法。不仅如此，傅里叶级数对许多数学概念的发展和澄清也有重大作用。它结束了数学界关于函数是不是可以用三角级数表示的长期争论，推广了函数的概念；维尔斯特拉斯 1861 年正是用三角级数构造了第一个处处连续而处处不可微的函数，为数学分析的严密化注入强大的动力。

1807 年，傅里叶把这篇标志着数学物理学史上一个里程碑的经典著作《热的解析理论》提交法国科学院。评审论文的是法国著名的三 L[①]：拉格朗日、拉普拉斯和勒让德。由于在论文中傅里叶坚持认为任意函数可以展开为三角级数，而作为评审委员的拉格朗日坚决否定这种展开的可能性，虽然他仅仅批评这篇论文缺乏严密性。论文被拒绝了。不过，科学院确认这是一个值得深入研究的课题，并且高度评价作者大胆而创新的方法，鼓励傅里叶更加严密细致地处理和发展自己的数学思想，同时把热传导的数学理论订为 1812 年科学院大奖的征文课题。1811 年，傅里叶把修改以后的论文提交科学院，并且赢得了大奖。评审委员会高度赞扬这个意义重大的成果，同时对论文中明显地缺乏严密性提出批评，因此，该文没有在科学院的《报告》上刊登。这一待遇大大刺伤傅里叶的自尊心。一直到 10 年以后，傅里叶成为科学院的终身秘书，他才利用这个机会，把自己 1811 年的论文原封不动地发表在《报告》里。

对待傅里叶论文的态度反映出纯粹数学家和数学物理学家风格的不同。应该说，对推理严密性的要求是必要的；这是一个理论是不是完善的重要标志。但是，对新诞生的理论过于“吹毛求疵”，不但不能促使它完善，反而可能扼杀它的成长。实际上，拉格朗日

① 拉格朗日 Lagrange、拉普拉斯 Laplace、勒让德 Legendre 三人姓氏的第一个字母都是 L，所以人们称他们三人为三 L。

曾经发现过傅里叶定理的特例，可是要得到普遍性的结果并且给予严密的论证，就不是那么容易了。正是这些困难使拉格朗日止步不前。纯粹数学家这种“保守”态度妨碍他们直接对科学的发现作出重大贡献。当然，他们提供的数学工具对科学家的发现是重要的，甚至是必不可少的。其实，纯粹数学家在数学研究中同样反对一味追求精确和严谨，提倡创造性的想像，也不排斥像伟大诗篇和音乐中所具有的那种“松散”。微积分诞生的时候，在理论上甚至自相矛盾，不能“自圆其说”；它的严密化经历了近200年的曲折过程。怪不得有人风趣地指出，当年牛顿和莱布尼兹要是知道他们在微积分理论中存在那么多漏洞，就决不会把它拿出来发表了！正是在这个意义上，英国著名科学家开尔文爵士（1824-1907）不理会傅里叶的著作中明显缺乏严密性，称它为“伟大的数学诗篇”。

1815年3月1日，退位的拿破仑率领一队卫士由被放逐的厄尔巴岛出发，在法国南部戛纳登陆。这时候傅里叶仍在格勒诺布尔，不过他已经宣誓效忠路易十八。获悉拿破仑登陆的消息，他立刻骑马到里昂向波旁王朝报告。可是当局对他的报告并不相信。在返回格勒诺布尔的路上，傅里叶遭到逮捕，被带到拿破仑面前。拿破仑正手里拿着一支圆规俯身在看地图。过了好一会儿，他才开口：

“好啊，行政长官先生，你也反对我？”

“陛下，”傅里叶喃喃地说，“我宣过誓，所以不得不尽责。”

“哦，你说的，尽责？你难道不知道全法国没有一个人持你这样的看法？我不是要你去想像，你活动计划使我多么害怕。我只感到难过，在我的对手中有我埃及远征军中的老朋友，在宿营地他和我还一起啃过面包！还有，傅里叶先生，你难道忘了我所赐予你的一切？”

几天以后，拿破仑召见重新效忠于他的傅里叶：

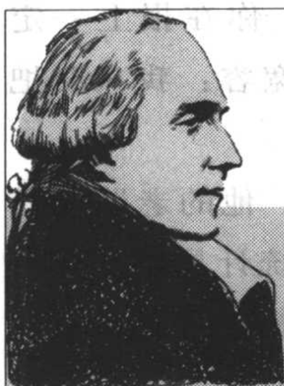
“你看我的计划怎么样？”

“陛下，我相信您将遭失败。在前进的路上，您会遇到一些狂热的崇拜者，不过仅此而已。一切都将过去。”

"哼！没有人崇拜波旁王朝——一个人也没有。你在报上一定已经读到，他们把我排除在法国之外；我本人更加宽容：我只要把他们排除在土伊勒里宫之外！"

波旁王朝第二次复辟又一次使傅里叶陷入困境。他的老朋友搭救了他，并且让他回到老家欧克塞尔出任塞纳省的统计局长。1816年，科学院要选他为院士，可是波旁政府认为，拿破仑的朋友不配享受这种荣誉。科学院没有屈服。第二年，他被选为院士。和蒙日相比，波旁政府对傅里叶是宽大的了。1822年，傅里叶任科学院终身秘书。可惜他把自己的晚年全都销蚀在夸夸其谈之中，他大谈自己未来的研究计划而不再进行任何科学研究。其实，他完全不需要自夸。他已经完成不朽的工作。由于傅里叶级数和进一步扩展的傅里叶积分对科学的巨大促进，他的名字已经永远铭刻在人们的心中。

在埃及的经历使傅里叶相信，高温对身体有益。这种奇怪的念头促使他的死亡。他像木乃伊似的在自己身上裹上好几层布，并且在室内保持比撒哈拉沙漠更高的温度。1830年5月16日，他死于心脏病（有的说是动脉瘤），享年62岁。



拉普拉斯

(1749—1827)

一切自然现象只是少数几个永恒不变的规律的数学结果而已。

——拉普拉斯

为了揭开宇宙之谜

作为数理天文学家，拉普拉斯被公正地称为法国的牛顿；作为数学家，他是概率论近代理论的奠基人；不过在为人方面，他遭到不少人的非议。

1749 年 3 月 23 日，皮埃尔·西蒙·拉普拉斯诞生于法国西北部的诺曼底的博蒙镇里一个农民家庭，家境还算不错。可是拉普拉斯出于虚荣心，羞于谈起自己贫微的过去，这使得后人对他的童年几乎一无所知。据说在乡村小学念书的时候，拉普拉斯在一次神学辩论中表现出色，于是他得到富有的邻居们热心帮助，继续深造。在博蒙有一所军事学校，他在那里求学，还教过一段时间数学。他的数学才华和记忆能力给人们留下深刻的印象。

1767 年，年青英俊的拉普拉斯，擦掉靴子上的泥土，怀里揣着一封当地一位大人物热情的推荐信，决定到巴黎一展抱负。他在一家小客店放好箱子，来到科学院，满怀信心地递上介绍信求见法国科学院的实际负责人达朗贝尔。不料等了半个时辰，看门人冷淡地回来告诉他：

“大人今天不见客。”

达朗贝尔对光靠知名人士介绍的年轻人不感兴趣。拉普拉斯是机灵人。他立刻意识到毛病出在哪里。回到住所，借着摇曳的烛光，他洋洋洒洒地给达朗贝尔写了一封长信，对力学的普遍原理作了擘肌分理的论述。这一招果然灵验。达朗贝尔马上写信邀请他：

“先生，您知道我没有注意您的推荐信。您不需要这类东西。您的自我介绍要好得多。这对我就够了。我的支持是您所应得的。”

过不几天，巴黎军事学校聘请拉普拉斯为数学教授。数学史上新的光辉的一页从此开始了。

作为一个诺曼底农民的儿子，巴黎的一切使他眼花缭乱。宫殿、教堂以至马车和妇女的服饰都是新奇的。不过，相比之下，他对变幻莫测的自然界的物理现象更感兴趣。凡是有助于解释世界的，如潮汐的涨落，声波的传播，毛细现象，比热的测定等，他都悉心加以研究。但是，这些“枝节”问题上的成就不能使他满足。他更有一项宏伟得多的计划：揭开宇宙之谜！这个问题的困难和复杂程度，一般人简直难以想像。本书第六章中我们谈到过“三体问题”，拉普拉斯研究的问题同它类似，不过规模要宏大得多。他得由牛顿定律计算出太阳系所有行星之间以及它们和太阳之间相互作用的综合结果。他要回答：木星和月球的加速度会不会使木星掉落到太阳上，使月球同地球相撞？土星将飞出太阳系，还是继续作为太阳系的一个成员？……总之，他要解开一个伟大的谜：假如牛顿万有引力定律确实是普遍适用的而且是支配行星运动的惟一定律，那么太阳系究竟是稳定的还是不稳定的？

年轻好动的拉普拉斯把工作以外的一切消耗，包括时间和金钱，限制到最低限度，全力以赴地埋头研究。十载寒窗，终于学有所成。1773 年，拉普拉斯朝着这个伟大目标迈出巨大的一步。他证明了，行星对太阳的平均距离不变（在一个微小的周期性变动之内）。这时候他才 24 岁。由于这一辉煌胜利，拉普拉斯当选为科学院副院士。当然，人们没有忘记他的其他成就。法国科学院在一份报告中

指出，在科学院历史上，还没有一位这样年轻的学者，在这样多的困难主题上，提出过这样多的论文。

当拉普拉斯着手研究的时候，科学界对宇宙存在着各种意见。牛顿本人相信，为了使太阳系保持一定秩序，不致被毁灭或瓦解，上帝不时地进行干预可能是必要的；另一种意见，例如欧拉，他对于能不能在牛顿学说基础上进行这样宏伟的计算，深表怀疑，因为它所牵涉到的力实在太多，它们的相互关系实在太复杂。牛顿是伟大的。是他发现了天体力学的计算基础——万有引力定律。可是在太阳系稳定性这个伟大主题面前，牛顿不得不求助于更伟大的上帝。从牛顿到欧拉差不多经过了半个世纪。欧拉也是伟大的。是他抛弃上帝的偶像，第一次对月球运动进行透彻的分析和计算——而且是在双目失明的情况下进行的！可是在伟大的宇宙面前，他深感自己的无力和渺小。从欧拉到拉普拉斯大约又经过了半个世纪。拉普拉斯不仅接受这一挑战，而且旗开得胜。他成功地用数学证明了太阳系是稳定的。

为了这个结论，拉普拉斯呕心沥血，整整奋斗了近30年。在漫长的岁月里，成功的喜悦时时伴随着失望、痛苦、挫折和政治动乱的惊涛骇浪。伟大的《天体力学》的问世是人类智慧和意志力量的胜利。在《天体力学》中，拉普拉斯把条件高度理想化了。比如说，他忽略了潮汐的摩擦。同时，自《天体力学》出版以来，人们对太阳系的知识又增加不少，这些因素，拉普拉斯当然也不可能考虑在内。因此，如果说现实的太阳系稳定性问题还有进一步讨论的余地，这大概不算过分。尽管这样，拉普拉斯无疑在这个方向上迈出了意义重大的一步。

天体力学

对于拉普拉斯此后的科学工作，傅里叶有过精湛的总结：

“拉普拉斯的一切研究都朝着一个固定的方向绝不偏离。他才

能的主要特色就是目标的坚定一致。开始研究太阳系的时候，他已经处于数学分析的顶峰，熟谙其中的奥妙。在这个领域进行开拓，没有人比他更为胜任了。1773 年他解决天文学上一个最重要问题①。从此他决定把自己的全部才智献给数理天文学。他的使命就是使它臻于完善。他精心设计这一伟大工程，并且以科学史上罕见的不屈不挠精神毕其一生精力来完成它。这项工程的意义重大，是值得这位天才引以自豪的。他着手撰写时代的《大综合论》——《天体力学》；不过他的不朽工作远远超过托勒玫的《大综合论》，就像近代的数学分析远远超过欧几里得的《几何原本》。”

拉普拉斯无论在数学上从事哪项研究，都是围绕一个目的：揭开宇宙之谜。他是明智行事的卓越榜样。他把自己的力量集中于一个最值得他努力的方向，而这个方向同他的才能十分相称。有时候，拉普拉斯想改变方向，不过很快就纠正过来了。有一次，数论深深吸引了他。可是一旦认识到解开整数之谜需要花费比想像多得多的精力，他毅然摆脱了它的诱惑。即使是他在概率论方面的划时代的工作，粗粗一看似乎偏离了他的主要方向；事实上，这项研究恰恰是由于数理天文学的需要所引起的。

《天体力学》——拉普拉斯一生中最伟大的杰作——在 26 年时间里分卷出版。头两卷发表于 1799 年，研究行星的形状、运动和潮汐现象；接着的两卷出版于 1802 年和 1805 年；最后的第五卷在 1823-1825 年完成。它把牛顿、克莱罗②、达朗贝尔、欧拉、拉格朗日等人以及拉普拉斯自己的成果和发现融合成一个完美的整体，建立起一座无比壮丽的天体力学大厦。它是这样的完善，以致相当一段时间里，他的后继者们几乎不能再添加什么了。不用说，这部不朽名著受到学术界极其热烈的欢迎。

《天体力学》中的数学说明十分简略，有时候显得相当笨拙。

---

① 指行星到太阳的平均距离不变。

② 克莱罗（1713-1765）是法国数学家、天文学家，他所著《月球理论》促进了天文学的发展。

拉普拉斯只关心结果，不注意推导过程。为了使著作有一简洁的形式，避免冗长的数学证明，他往往略去一切，只留下结果，并且在结论前面加上一个叫人放心的短语："容易看出"。实际上，对于读者，甚至对于作者本人，"容易"应该理解为"很难"。拉普拉斯自己承认，要重新推导这些结果并不容易。美国数学家兼天文学家鲍迪奇翻译了《天体力学》五卷本的四卷和附加的说明，他抱怨说："只要一看到"容易看出，……"这句话，我就知道起码得花好几个小时的苦功夫才能填补这段空白。"

的确，拉普拉斯对数学往往表现出不耐烦。在他看来，数学只是一种手段而不是目的。它是人们为解决科学问题所必须精通的工具。十分有意思的是，爱尔兰大数学家哈密顿正是由于在《天体力学》的数学证明中找出一处错误，引起都柏林天文学教授约翰·勃林克兰的注意，从此开始他光辉的数学事业。

在《天体力学》的注解中，拉普拉斯顺便谈到关于宇宙起源的假设——星云说。他认为整个太阳系是由一团气体星云凝聚而成的，它们在万有引力作用下，根据角动量守恒原理①，逐渐演变成各个行星。他并不知道，40多年以前，德国大哲学家康德在青年时代曾经匿名在一篇论文中提出过同样的假设。这是有关宇宙起源的第一个唯物主义假设。以前，神学牢牢统治着这块世袭领地。牛顿在致本特利大主教的信中所表达的观点具有代表意义："引力可以使行星运动，但是没有神的力量，就决不能使它们作现在这样绕太阳转动的运动。"在牛顿看来，宇宙是由神的"第一次推动"而开始运动的。现在，在星云说里，"第一次推动"的问题却被取消了。代替它的是在时间进程中物质内部矛盾运动的逐渐演化。对于这个重大突破，恩格斯认为是在"僵化的自然观上打开第一个缺口"，"如果大多数自然科学家……立即沿着这个方向坚决地继续研究下去，

① 角动量是体现物体转动惯性大小的惯性矩和转动角速度的积。物体所受外力矩之和为零时，角动量守恒。这是自然界普遍遵守的重要的基本规律之一。

那么自然科学现在就会进步得多。”

1796年，拉普拉斯的《宇宙体系论》出版。他不用任何数学公式，对《天体力学》的主要结果作了生动介绍。它和1814年出版的《概率的哲学导论》一样，都是拉普拉斯脍炙人口的名著。它们充分证明，拉普拉斯在文学上有同他在数学上几乎同样卓越的才能。一个不掌握数学专门知识的人，如果想了解概率论理论的意义和它的魅力，最好去读一读拉普拉斯《概率的哲学导论》一书中的出色的介绍。虽然自从拉普拉斯写这部书以来，概率论，特别是它的基础方面有了重大进展，他的解说仍然是经典的。在书中，拉普拉斯对宇宙和他自己的工作抱负有一段极其精辟的表述：

“……我们应该将宇宙的现状看做是它以前状况的结果和今后状况的原因。”

“假如有人知道了在某一时刻支配自然的一切作用力，以及它所有组成部分的相对位置，假如他的智力足够发达，能把这一切数据加以分析，并把全宇宙中从最巨大的物体到最细小的原子的一切运动完全包括在一个公式里面，这样对他就没有什么东西是不确定的了。未来的也好，过去的也好，他都了如指掌。人类智慧在天文学上所达到的完美程度，可以说已向我们显示出它隐约的轮廓。……总会有一天，由于经过了几百年的研究，现在所隐蔽的事实都被清楚地揭露出来了。我们的后代可能会觉得惊讶，为什么这样明显的真理会逃过我们而长久不被发现。”

在拉普拉斯看来，宇宙是可知的。它所追求的就是一个无所不包的公式，它不仅能说明宇宙的过去和现在，还能预言它的未来。这是何等伟大的气魄！尤为难得的是，他认为，要达到这一目标，不需要借助于神。他充分信赖数学和人类的力量。

否则将更伟大

如果除此以外，拉普拉斯不做其他事情，他一定会比现在更加

伟大。可惜事实不是这样。

“我研究数学，与其说是为了贪图虚名，不如说是出于爱好，”1777 年他在给达朗贝尔的信中这样写道。“我最感兴趣的是研究发明家的进展，观察他们在解决所遇到的障碍时所表现出的才智。然后我把自己置于他们的地位，并问自己：我应该怎样来克服这同样的障碍？虽然这种替换在绝大多数情况下是使我出丑，不过，无论如何，分享他们成功的喜悦，充分补偿了我小小的丢丑。要是我运气好，能在他们的工作中增添一些东西，我总把自己的成绩归功于他们首创的努力，并且相信，如果他们处在我的位置，一定会走得比我更远。”

他的第一句话，人们或许还可以同意；可是对于他后面谦恭的表白，却不敢苟同。事实是，严重的虚荣心使拉普拉斯不能充分肯定同他声望相当的同行们的工作。他把同时代的和前辈们的研究成果攫为己有而不作任何解释。他从欧拉、拉格朗日拿来位势理论的根本概念，从勒让德的数学分析中取走所需的一切，……在《天体力学》中，他不提别人的工作而把自己的成果同他们的混在一起，这样就给后代造成这样的印象，似乎宇宙空间的数学理论是他一个人创造的。他对太阳系动力学的重大贡献，轻易地盖过他要抹煞的其他人的工作。当然，他还不至于忘记牛顿。在《天体力学》中重复提到的只有牛顿一人。似乎天体力学的宏伟大厦，只是他——拉普拉斯——和牛顿两人建造的。这使得拉普拉斯的巨大声望蒙上一层难以抹掉的阴影。

人们喜欢把他同拉格朗日进行对比。因为他们同是 18 世纪法国两位最大数学家，而他们的工作和个性各方面构成有趣的对照。拉格朗日是大数学家，他把一切问题升华到数学的高度，使它们既优美又具有普遍性；拉普拉斯是大哲学家，他以百折不挠的精神，孜孜不倦地用数学来探索宇宙的奥秘。前一个谦逊温和，不趋炎附势，不追名逐利；后一个爱虚荣好吹嘘，见风使舵，巴结权势。在当时，拉普拉斯的声望要高于拉格朗日，这大概是因为拉普拉斯所研究的

主题本身更为伟大的缘故。当然，这是一项高度理想化的工程。不必说在拉普拉斯时代，即使在今天，我们所掌握的真实宇宙的知识还太少，还不可能使这个问题有真正的解决。用数学来处理我们现在所知道的资料，可能还需要经过许多年，何况还有更大量的资料我们没有掌握呢！由于把无限复杂的条件大大简化，因此，对于拉普拉斯太阳系稳定性的结论，今天可能有人表示怀疑。但是可以肯定，没有一个数学物理学家怀疑拉普拉斯在研究理想宇宙模型中所发展起来的数学方法的威力和有效性。这是他对数学的伟大贡献。拉普拉斯在欧拉、拉格朗日等人基础上发展起来的位势理论就是一例。这是当星球不能当作质点处理的时候计算星球间的引力所必不可少的数学工具。在今天，位势理论的意义已经远远超过拉普拉斯当年的梦想。对物理科学来说，这个理论已经变得比整个牛顿万有引力理论更有意义。没有它，就无法理解现代的电磁理论；没有它，研究某些类型的物理问题就成为不可能。可以说，流体运动、引力、电磁学和其他领域引入位势理论，是数学物理学中最巨大的一次进步。著名的位势方程——拉普拉斯方程——已经成为今天理工科大学学生必须熟悉掌握的一个重要方程。

卷入政治漩涡

拉普拉斯在政治上的操守也是人们议论纷纷的主题，尽管有人辩论说，要不是拉普拉斯手段高明，顺利地渡过法国大革命时期云谲波诡的政治风云，他就不一定有条件来完成他的《天体力学》了。

1783年，拉普拉斯接替数学家裴蜀任军事考试委员。两年以后，他晋升为科学院院士。这一年还发生一件在他一生中意义重大的事件：他在军事学校对一名16岁投考青年进行考试。这个年轻人打乱了拉普拉斯的计划，使他从数理天文学的高深研究跌入肮脏的政治泥坑。这个青年的名字就是拿破仑·波拿巴。

不久，法国大革命爆发。拉普拉斯侥幸躲过这场风暴。据说拉普拉斯和拉格朗日所以免于上断头台，是因为新政权要他们为炮兵计算弹道和指导火药中硝石的制造。革命以后拉普拉斯深深卷入政治。对于他的变幻的政治风云中翻云覆雨的高超本领，法国人礼貌地称他是位“政治家”。每次政府倒台，拉普拉斯总能谋到一个更好的职位，这只消他在一夜之间由激进的共和分子变成狂热的保皇派。

拿破仑热心地为他开辟道路。从议会议员、议会大臣一直提升到内务大臣。拿破仑的各种勋章，包括荣誉勋位的大十字勋章，都挂在这位反复无常的大数学家的胸脯上。这似乎还不够。后来拿破仑又加封他为伯爵。可是拿破仑一失败，拉普拉斯毫不迟疑地在驱逐拿破仑的法令上签上自己的名字，把他的恩主一脚踢到波涛汹涌的大西洋上的一座孤岛！

怪不得拿破仑在被放逐到圣赫勒拿岛以后，对拉普拉斯作了尖刻的评论：

“拉普拉斯是第一流的数学家，但是是一位平庸的行政官员。从他的第一件工作起，我们就发觉自己上当了。他看不到真正的问题，却怀着可疑的想法到处玩弄权术，最后带着无限小的精神混入政界。”

复辟以后，这位“无限小大臣”轻巧地把他的忠诚转向路易十八。现在，他作为德·拉普拉斯侯爵端坐在上议院的议席上。路易十八表彰他的功绩，1816 年任命他为法兰西学院院长。

拉普拉斯善变的政治才能也表现在他的科学著作中。1796 年《宇宙体系论》第一版出版。拉普拉斯把他的杰作献给共和国的“五百人院”（下议院），书中以这样庄严的语句结尾：

“天文科学的最大好处是消除由于忽视我们同自然的真正关系而造成的错误。因为社会秩序必须建立在这种关系之上，所以这类错误就更具灾难性。真理和正义是社会秩序永恒不变的基础。但愿我们摆脱这种危险的格言，说什么进行欺骗和奴役有时比保障他们

的幸福更有用！各个时代的历史经验证明，谁要破坏这些神圣的法则，必将遭到惩罚。”

王朝复辟以后，《宇宙体系论》第一版禁止发行。1824 年，德·拉普拉斯侯爵换了一套格言。这一次他斯文地举起“科学的火炬”而不再侈谈咄咄逼人的“真理和正义”：

“让我们小心地保护和增加先进知识的积累吧，这是人生的一大快事。天文科学为航海和地理学的发展作出过重大贡献，但它最大的好处是消除由于天体现象所产生的恐惧，消除由于忽视同自然的真正关系而造成的错误。如果科学的火炬被扑灭，这种错误很快会重新出现。”

我不需要那个假设

但是作为一位大数学家，拉普拉斯无疑具有真正伟大的品质。当根本信念受到挑战的时候，他表现出无与伦比的精神勇气。他同拿破仑关于《天体力学》的著名争论显出他的可贵本色。有一次拉普拉斯把他的杰作送给拿破仑。为了表示自己高明，拿破仑傲慢地奚落拉普拉斯的“失察”：“你写了一部关于宇宙体系的巨著，可是竟没有一次提到宇宙的创造者。”

“陛下，”拉普拉斯回敬道，“我不需要那个假设。”

在拿破仑面前能够挺起腰杆把真相说出来，无疑需要极大的勇气。著名生物学家、进化论的先驱者拉马克在一次科学院会议上，就因为拿破仑故意的粗暴态度，被弄得伤心地哭起来。

后来拿破仑对拉格朗日重复同样的表现。不爱争论的拉格朗日没有直接顶撞拿破仑，不过回答得十分巧妙：“哦，陛下，这是个不坏的假设。它可以解释这么多东西呢！”

拉普拉斯对科学上新手的真挚关怀是异常感人的。法国几何学家毕奥（1774-1862）谈到他年轻的时候在一次科学院会议上宣读论文的情景。拉普拉斯出席了那次报告会。会议结束以后，拉普拉斯



“我不需要那个假设。”

把他拉到一边，给他看一份发黄的手稿，这是拉普拉斯自己完全相同的发现，不过一直没有发表。他要毕奥保守秘密，还鼓励他继续研究下去并且把论文发表。这是拉普拉斯这类行为中的一例。拉普

拉斯喜欢说，数学研究中的新兵都是他的义子。这句话并不夸张。他对待他们就像对待自己的亲儿子。

拉普拉斯晚年在离巴黎不远的阿克爱尔的乡间别墅愉快度过。政治上的惊涛骇浪没有把他淹没，科学上的艰难险阻不能把他吓倒。一个诺曼底农民的儿子，成了显赫的贵族，成为举世闻名的大数学家。他有理由感到欣慰。不过，他十分清楚，自己几十年的工作只是向揭开宇宙之谜这个伟大目标向前迈进了一小步。

1827 年 3 月 2 日，拉普拉斯和往常一样，早晨散步回来，用过早餐，来到书房工作。突然，他感到一阵胸闷，恶心，一会儿浑身冷汗淋漓。可是他正忙于校阅《宇宙体系论》第六版的校样，没有意识到死神在悄悄地逼近。两天以后，这位向宇宙提出大胆挑战的学者，手握着那份校样，溘然长逝，享年 78 岁。他留给人们的最后遗言是：

“我们所知道的只是微小的；而我们所不知道的是无限的。”





高斯

(1777—1855)

大自然，您是我的女神，我一生的效劳都服从于您的规律。

——莎士比亚①

新的数学发展高潮

在18世纪和19世纪之交处，耸立着卡尔·弗雷德里希·高斯雄伟的丰碑。

以欧拉、拉格朗日为代表的18世纪数学家，把微积分用于自然探索和工程技艺，产生了微分方程、变分法等众多的数学分支。在获得丰硕成果的同时，牛顿的机械唯物论自然观强化了对科学家思想的统治，以致在18世纪末期，不少数学家对数学本身产生了悲观情绪。似乎数学为自然现象建立起微分方程，给出它的求解方法，就万事大吉了；而有的课颗又太复杂，看不出有任何解决的希望。

当然，悲观的迷雾最终为数学发展的光辉事实所驱散。只要面对生活和生产的实际，数学就会得到新的动力而不断前进。工业革命的深入为此提供了广阔的天地。与此相呼应的法国大革命，结束了封建专制在欧洲的长期统治。这个人类思想解放的伟大运动，也给数学注入了活力。新概念、新思想不断涌现。从苦难深重的德国

① 莎士比亚（1564-1616）是英国大文豪、文艺复兴时代大剧作家和诗人。

大地上升起的一颗灿烂的明星——卡尔·弗雷德里希·高斯，宣告了新的数学发展高潮的到来。高斯在数学各个领域的伟大贡献，特别是在数论和几何学上的创新，深刻影响着后世数学的发展。随后又有柯西、黎曼等群星的推进，使19世纪的数学空前繁荣。

小木屋里飞出了金凤凰

下了一夜的暴雨，河里的水涨得满满的。春洪夹带着泥石从山上奔泻直下，发出隆隆的响声。空气里弥漫着泥土的芳香，显得格外清新。农民施密特嘴里含着烟斗刚从市场回来。突然在转弯处洪水溢出河面滚滚而来。一个3岁左右正在旁边嬉玩的孩子被这景象惊得不知所措，两手握着拳头呆呆站在那里。一个浪头过来把他卷了进去。灾难眼看就要发生。施密特赶紧飞奔上前，纵身一跃把孩子从水里一把抱起。他没有想到，救起的这个孩童后来成为历史上最伟大的数学家之一。他就是和阿基米德、牛顿齐名的卡尔·弗雷德里希·高斯。由于他非凡的数学才华和伟大成就，人们尊崇他为“数学王子”。

可是这位年幼王子的血统和王室丝毫无缘。1777年4月30日，高斯诞生于德国不伦瑞克城。祖父是贫苦的农民。父亲约翰·狄特里希是个园艺工人，还当过运河看守人和泥瓦匠。他识字不多，但是为人诚实耿直，做事一丝不苟，在家相当严厉。母亲陶乐珊·本茨是石匠的女儿，聪明直率，性格坚强。陶乐珊34岁的时候和约翰结婚，独生子高斯是她的心肝宝贝。她了解爱子的兴趣和才能，积极支持他求学上进。约翰于1806年去世。此后高斯母子俩在长期坎坷的生活道路上相依为命，感情至深。高斯成名以后尽心竭力使母亲度过安乐的晚年。在她生命的最后4年，93岁高龄的陶乐珊双目已经完全失明。在母亲的长期病患中，高斯一直亲自在旁侍候。

人们一定会奇怪，像高斯这样的劳动者家庭，在德国比比皆是。双亲的文化知识和他们的财富一样贫乏。他们既供养不起孩子上大

学深造，也无力对他的学业作指导。可是偏偏在不伦瑞克的这所简陋木屋里，飞出了一只震惊世界的金凤凰！这是为什么呢？

早熟的童年

在整个数学史上，没有人像高斯那样早熟。说来简直令人难以置信，他在3岁的时候就已经显示出不凡的智慧。有一个星期六，约翰在费力地计算他管辖下工人的周薪，没有察觉儿子正好在旁看着。结果好容易计算出来，他深深地松了一口气。不料小高斯过来拉拉他的衣角，细声说：

“算错啦，爸爸。总数是……”

约翰惊讶不已，决定重算一遍，果然，儿子是对的！后来高斯曾半开玩笑地说：

“我在学会说话以前，已经学会计算。”

家里的确没有人教过他算术。很可能是小高斯自己在学字母的时候，学会了1、2、3、4的意思。

天刚蒙蒙发亮，爸爸已经在园子里默默地干活。小高斯十分懂事。他跟着妈妈，一会儿帮着给小鸡喂食，一会儿忙着把一盆盆鲜花端出去晒太阳。家里的惟一常客是舅舅弗雷德里希·本茨。他是位技术高超的锦缎织工，勤学好思，头脑机敏。舅舅十分疼爱聪明的小外甥。他一来总要给小高斯讲故事，做游戏，有时还带他出去捉蝴蝶，钓鱼，采蘑菇，……和舅舅相处的这些愉快的时光，一直珍藏在高斯的记忆里。

4月的一天，风和日丽。小高斯骑在舅舅的肩上学“骑马”。他手里拿着一根小树枝，嘴里高声叫着：“驾！驾！”俨然是位威武的将军。突然，嗒嗒奔跑着的“马”停了下来。原来，在河的上游漂来一根木头。

“小高斯，你说木头为什么不沉下去？”

“木头轻呗！”小高斯不假思索地回答。

舅舅弯下腰，拾起一颗小石子，又问："这颗石子重还是那段木头重?"

"木头重。大木头重多啦!"

弗雷德里希并不吱声。只见他用力一扔，扑通一声，石子沉到了河底。

"……"

舅舅没有给小外甥解释，为什么比大木头轻的小石子会沉下去，但是，这件事给小高斯留下难忘的印象。他认识到，要达到正确的结论，必须有严密的推理。他逐渐养成习惯，遇事一定要问它几个"为什么"。

舅舅是个有心人。为了让小外甥更好地成长，他省吃俭用，买来不少有趣的书籍。这一本本趣味盎然的小书使小高斯爱不释手。那里面有以损人开始、以害己告终的狡猾的狐狸和助人为乐的小白兔，也有孜孜以求的先贤哲人和为自由而壮烈献身的英雄。逢到这种时光，妈妈做起事来就蹑手蹑脚，生怕惊动孩子的思考。看着儿子那种着迷的神情，约翰只好无可奈何地摇摇头。这也难怪，因为哪家的穷孩子能够逃脱流汗干活的命?书读得再好，有什么用呢?到了冬天，天还没有全黑，爸爸就催他上顶楼睡觉。这样既能够节省燃料，第二天还可以早些起床，帮着干活。顶楼又矮又小，直起身子来，就会碰脑袋。最糟糕的是上面没有灯，看书成了问题。小高斯急中生智，想出个好办法。他找来一棵芜菁，把里面挖空，塞进油脂，再用粗棉搓一根棉条做灯芯。借着微弱如豆的光亮，他蜷缩着身子，贪婪地咀嚼着书里的每一个字。知识的泉水汩汩地滋润着高斯幼小的心田。等到油脂烧尽，发出缕缕青烟，已经是寒气袭人，夜深人静了。

初露头角

一过7岁生日，小高斯挎着妈妈做的新书包，高高兴兴进入当

地的国民小学。可惜，这所小学相当落后，并不叫人羡慕。校舍破旧不堪，讲课完全随教师的高兴。管理学校的是个名叫布特纳的老师，他性情粗暴，动辄揪着小学生的耳朵罚站墙角。100 多名小学生见到他，就像老鼠见了猫，吓得几乎连自己的名字都记不清了。可是，就在这个使孩子胆战心惊的地方，高斯找到了幸运。

1787 年，小高斯刚满 10 岁。一天，神情严厉的布特纳夹着讲义来上算术课。一上讲台，他背过身子在黑板上写下一串长长的算式：

$$81297+81495+81693+\cdots+100899=?$$

后一数都比前一数大 198，一共 100 个数相加。一看这长长的式子，学生们都害怕得低下了头，连大气也不敢出。学校的规矩是，第一个算出答数的孩子把他的石板放在讲台上，第二个就放在第一个上面，……老师刚写完题目，小高斯轻轻地走上前来，把石板放在讲台上说：

“老师，放在这里啦。”

看到其余的孩子都在满头大汗地一个个数相加，老师根本不相信，这个班上年纪最小的学生会创造出什么奇迹。

“谁不动脑子，想胡乱写一个数交差了事，可得当心！”布特纳一边说，一边样子吓人地挥舞着他那硕大的拳头。

可是，小高斯沉静地坐在椅子上，对老师的警告毫不理会。下课以后，布特纳把石板都看了一遍，在小高斯的石板上只有简单的一个数。高斯在晚年的时候曾经提到，在班上的所有答案中只有他是对的；不过他没有说明是怎样计算出来的。

高斯通向不朽光荣的大门从此打开。布特纳买来最好的算术书送给小高斯。不费多少力气，小高斯把它们一览而过。

“他已经超过我，”布特纳不得不承认，“我没有更多东西可以教他了。”

事情可能是这样。布特纳本人对这个孩子已经帮不了什么忙。

幸好，这位校长有个年轻的助手，名叫约翰·马丁·巴蒂尔①。他的工作是教小学生写字和削鹅翎笔。巴蒂尔身材颀长，有一双和善的大眼睛，对数学有特殊的爱好。小高斯很快和他结成形影不离的好朋友。共同的志趣培育着年轻助手和10岁小学生之间的温暖友情。他们的真诚友谊一直保持到巴蒂尔去世。两位好朋友一起学习，相互切磋。巴蒂尔买来的代数和分析书籍成了他们共同的课本。他们冲破一道道障碍，解决一个个疑难。尤为可贵的是，现成的结论已经不能使小高斯满足。他以批判的眼光对书上的结论逐个进行审查，一连要问上几个“为什么”。在这个基础上，他开始对数学大师们的某些“证明”不客气地提出挑战。

一只勇敢的雏鹰，拍拍翅膀，振翅欲飞了！

良好的开端

“高斯！……高斯！”

巴蒂尔从东头跑到西头，就是不见小高斯的踪影，等到他在大树下找到正在看书的小伙伴，已经是汗流浃背，上气不接下气。巴蒂尔今天特别兴奋，书店老板把他们盼望已久的欧拉著的《代数的完整介绍》买到啦。这是公认的代数学的权威著作。看到巴蒂尔手里高高举着的新书，小高斯高兴得连蹦带跳，一连在地上打了两个滚。他们顾不上多说话，立刻如饥似渴地阅读起来。书一页页唰唰地向后翻去，太阳不声不响地躲到山的后边。在看到“二项式定理”的时候，小高斯倏地站了起来。注视着静静流去的河水，他陷入沉思。

在中学代数里，我们知道，

$(1+x)^1=1+x$,

$(1+x)^2=1+2x+x^2$,

① 巴蒂尔(1769-1836)是德国数学家，后到俄国喀山大学执教，是罗巴切夫斯基的老师。

$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3,$$

………………………………

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots$$

这就是所谓“二项式定理”，其中 n 是正整数。如果 n 不是正整数，右边就有无限多项，这时要使等式成立，x 和 n 必须有一定限制，否则可能出现荒谬的结果。举例来说，假如 $x=-2$，$n=-1$，左边就是 $(1-2)^{-1}$，等于 -1；而右边则是

$$1+2+2^2+2^3+\cdots$$

就是说 -1 等于“无穷大”。这当然是错误的。

高斯以前的数学家们，有的（例如欧拉）虽然已经注意到这种奇怪而荒唐的现象，可惜他们并没有花功夫去研究它和解释它。甚至可以说，他们的内心深处似乎不愿意去考虑这个问题：在无穷级数的运算中应该施加些什么限制。他们陶醉在分析在应用中的辉煌成就，热衷于扩大新的战果，而无暇顾及推理的严密性。老数学家们所忽视的这个极端重要的问题，现在被这个 10 岁孩童紧紧抓住了。小高斯发觉，可能导出“-1 等于无穷大”这一类荒谬结果的证明，根本算不上是证明。必须把二项式定理适用的条件明确指出来。尽管这项工作已经超出初等数学的范围，这位第一个认真对待无穷大的学童坚持作出自己的证明。

无限过程的正确运用正是分析的精髓所在。现在，工作从一开始就有良好的开端。高斯被公认为现代数学中第一个严格证明论者，他对分析的严密性的要求逐渐影响整个数学。从高斯和同时代的柯西、阿贝尔以及他们的后继者维尔斯特拉斯、戴德金①等人以后，

---

① 戴德金（1831-1916）是德国数学家，高斯的学生。他的主要成就在代数理论方面，在数论的创建工作中引入了一些基本概念，对实数理论提出许多论据，认为有理数和无理数可以构成 一个无空隙的实数连续统。

数学的面貌同牛顿、欧拉和拉格朗日时代完全不同了。

在数学上，高斯不仅是严格证明论者，而且是无畏的革命者。他以对二项式定理证明的那种批判精神，在12岁的时候就对统治了2000多年的欧几里得几何是否是惟一的几何真理产生怀疑；到16岁，他已经清楚地看到非欧几何的曙光。这在当时，就像当年哥白尼提出“日心说”一样，无疑是地地道道的“大逆不道”。一年以后，高斯又开始对数论的某些证明进行彻底批判，尽管前辈们对它们已经相当满意。无懈可击的严密性加上前所未有的创造性，在高斯研究工作的一开始就得到无与伦比的结合。

高斯的这种特点，无疑反映了他本人超凡的智慧。不过这也不完全是从他个人头脑里凭空产生的。在他的工作中，我们可以清晰地听到资本主义新时代脉搏的跳动。在高斯的青少年时代，蒸汽机和纺织机震耳欲聋的轰鸣声不断从英吉利海峡彼岸传来，破坏了德国田园牧歌式的谧静。新的机器和发明犹如雨后春笋，不断涌现。机器日益精密，它们需要更为严密的理论。与此同时，从巴士底狱升起法国大革命的冲天火光和英国工业革命遥相呼应。它摧毁了欧洲的封建城堡，也焚烧了囚禁革命性科学思想的樊笼。批判旧世界的呼声空前高涨。在这种形势下，深受法国启蒙思想熏陶的高斯提出这样的问题就不足为怪了。既然千百年来被视作神圣的帝王统治可以被推翻，为什么一向被奉若神明的欧几里得几何不容有丝毫怀疑？因此，充满复杂的公式和各种符号的高斯的杰作和他同时代的同胞歌德（1749-1832）和席勒（1759-1805）的光辉诗篇、贝多芬（1770-1827）的不朽乐章、黑格尔（1770-1831）的辩证法一样，都是在他们各自领域里最有力地表现出时代的精神。

喜从天降

夜幕徐徐降落，喧闹的国民小学已经鸦雀无声。在教室里看书的小高斯收拾起书包回家。走出校门，他发觉外面比黑洞洞的教室



要亮不少，忍不住又把书取出，阅读起来。他在暮色下边走边看，不知不觉来到斐迪南公爵的不伦瑞克宫的门口。正在花园散步的公爵夫人十分惊奇：一个小孩子捧着一本厚厚的书竟看得这样入迷？她叫住孩子，问他叫什么名字，看的是什么书。大大出乎这位贵妇人的意料，小孩子看的竟是大学者欧拉的专著——《微分学原理》！公爵夫人把这事告诉了公爵。公爵曾听人说起过，不伦瑞克有个聪明过人的孩子，不过当时他半信半疑，不大在意。这次听夫人一说，果有其事，立刻决定第二天在宫殿亲自见见这个孩子。

公爵大人要召见一个普通园丁的儿子，这种新鲜事儿，以前谁也没有听说过。约翰听到公爵的传唤，默坐一旁，闷着头一个劲儿抽烟，不知道明天等待着的是祸是福。妈妈左叮咛右嘱咐，生怕儿子在这样重大的场面出什么差错。其实，这完全是过虑。别看高斯小小年纪，谈吐举止却是端庄持重，宛如一个极有教养的大人。第二天，小高斯穿一身从箱底翻出来的稍嫌肥大的新衣服，拘谨地跟在魁伟的巴蒂尔后面，来到宫殿。公爵一见孩子长得眉清目秀，已经有几分喜欢。

“你是约翰的儿子？”公爵问。

“是，大人。”

“听说你读过很多书？”

“……”高斯含羞地低下头，不知怎样回答才好。

“你能告诉我 1234×5678 等于多少？”斐迪南特意准备了两道算题想当面考考孩子。

一听到计算，小高斯一双大眼睛立刻明亮起来：

“7006652。”

“那么 13579×97531 呢？”

公爵夫人和周围的人还在思索刚才的答案，只听得小高斯清楚说出它的结果：

“1324373449。”

多次获得过军功勋章、素以骁勇善战著称的斐迪南公爵难得在当面夸奖一个人。今天在这个小孩子面前，他不由得连连点头。在自己的领地里有这样一位神童，他感到自豪。其余的人更是个个瞪大眼睛，惊奇得说不出一句话。

“你想不想上大学？”

“是的，大人。”小高斯完全清楚，自己的家里穷，上不起大学。爸爸几次和自己提起过，要学好手艺，准备将来继承他的“事业”。所以他不愿多想上大学的事。只有一次，小高斯跟妈妈谈起自己的心愿：要是将来有一天，即使不能像牛顿、欧拉那样上大学念书，只要能在大学图书馆里找一个差使，到了晚上，在里面想看什么书有什么书，就心满意足啦。妈妈听着听着，不觉一阵心酸，一把将他搂在怀里噙着泪说：“好孩子，妈一定给你想办法。”不过小高斯心里明白，要上大学图书馆实际上也希望渺茫。为了不让妈妈伤心，后来他再也不提这件事了。这时，他只听到公爵微笑着说：

“好，我来帮助你。”

小高斯高兴得心怦怦直跳。意想不到的幸运降临到他的头上！公爵答应，从现在起由他负担一切费用，直到高斯大学毕业。

诞生在18世纪末叶的德国，对高斯来说算是幸运。当时，英国工业革命的熊熊烈火已经烧到欧洲大陆，海洋上一艘艘喷着浓烟的炮舰趾高气扬，横冲直撞；商店橱窗里堆满争奇斗艳的花布；……统治阶级中一切有识之士第一次看到科学技术的无比威力。为了战争和享乐的需要，他们开始关心教育和科学的发展。小城镇办起了国民小学；学术赞助人成为时髦的头衔。科学走出宫廷和贵族的沙龙得到空前的发展。数量众多的学者从各阶级、各阶层涌现出来。默默无闻的园丁的儿子才有可能受到公爵大人的青睐。要是时间稍稍提前100年，情况就截然不同。那时知识只属于有闲的贵族集团，

知识分子寥若晨星。一个普通劳动人民的儿子——高斯，纵然有天大的才华，恐怕也难逃园丁或泥瓦匠的命运了。

错失良机

高斯深深懂得，上学的机会来之不易。母亲的期望，老师的鼓励，公爵的器重，激励他更加勤奋刻苦地学习。

13岁那年，高斯考入大学预科学校，着重进修古代语言。他在语言学方面显示出来的才能使老师和同学赞叹不已。他很快精通拉丁语和希伯来语，并且对语言学发生浓厚的兴趣。后来，他用优美的拉丁文写下许多不朽的名著。法国革命和拿破仑失败以后，欧洲出现民族主义的浪潮。科学家纷纷使用本国文字来写论文，他后期的著作也改用德文了。

1792年初，15岁的高斯进卡罗琳学院学习，掌握了欧拉和拉格朗日的著作，特别是精通了牛顿的《自然哲学的数学原理》。从少年时代起，他就十分敬重牛顿。在他的著作中，对欧拉、拉格朗日、拉普拉斯和勒让德等人都有极高的评价，但是对牛顿，高斯认为他“至高无上”。在古代数学家中，他最推崇阿基米德。只有一点他感到遗憾：为什么阿基米德在计算沙粒的时候不发明十进位或相当的计数制呢？他认为，不然的话，今天的科学将远远超过现有的成就。

1795年秋，高斯提着一只破旧的小皮箱，离开卡罗琳学院来到格丁根大学。10月的格丁根秋高气爽。位于德国中部的这座幽静小城沐浴在金色阳光下，显得分外妩媚迷人，仿佛在热情欢迎这位远道而来的年轻大学生。后来除去短时间的离开，高斯在这里工作、生活直到生命的最后一刻。由于他和后继者的杰出工作，遐迩闻名的格丁根学派从此崛起。格丁根成了举世瞩目的学术中心。这时候，高斯虽然是个学生，但是在数学上已经取得一系列的重要成就，特

别是对数论中的二次互反律①，他第一个作出严格的证明。这是他经过无数次失败才挖掘出来的一颗无比瑰丽的“算术的珍宝”。在本书第六章有关欧拉的工作中，我们已介绍过，仅仅发现这个定理就是个了不起的成就。欧拉发现过这个定理，但是他没有证明。他只是举几个例子作为验证。勒让德在 1785 年独立宣布了这一定理，并且先后给出两个证明。可惜他的证明不完备，因为他回避了一些重要的难点。这个被认为是 18 世纪数论中最重要的定理，使多少大名鼎鼎的数学家束手无策，却被当时尚不知名的高斯迎刃而解。1795 年，他不仅独立发现这个定理，并且第一个作出严格的证明。在证明中，他表现了惊人的技巧。他把数学归纳法运用得如此出神入化，以致凡是见过这证明的数学家无不拍案叫绝。鉴于它的宝贵和重要，高斯称二次互反律是“黄金定理”。对于这样重要的定理，有一个证明还不能使他满足。他反复思考多年，先后给出 6 个不同的证明。今天我们知道的证明已经有 50 个左右。对某一定理给予各种不同的证明是高斯研究上的一大特点。他认为“绝不能以为”获得一个证明以后“研究便告结束，或把寻找另外的证明当作多余的奢侈品”。因为，“有时候，你一开始未能得到一个最简单、最美妙的证明，但正是这样的证明才能深入到高等算术真理的奇妙联系中去。这是我们继续研究的动力，并且最能使我们有所发现。”

发表这一重大发现无疑会使他一举成名，默默无闻的穷大学生一夜之间将成为举世闻名的大数学家。面对荣誉的诱惑，高斯没有

① 要说明二次互反律，先要说明什么是同余式。下面提到的数都是整数。如果 a 与 b 的差可以被 m 整除，也就是 a 与 b 被 m 除，余数相同，就称 a、b 对于模 m 同余，记作 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\, m)$。例如 $29\equiv 2\ (\mathrm{mod}\, 9)$。如果存在一个 x，使 $x^2\equiv r\ (\mathrm{mod}\, m)$ 成立，就称 $x^2\equiv r\ (\mathrm{mod}\, m)$ 可解，或 r 为 m 的二次剩余。其中 x 是未知整数，r、m 是已知的，且 r 不能被 m 整除。例如 $x^2\equiv 13\ (\mathrm{mod}\, 17)$ 可解，但 $x^2\equiv 5\ (\mathrm{mod}\, 13)$ 无解。二次互反律说，当 p、q 是素数时，对于

$$x^2\equiv q\ (\mathrm{mod}\, p),\quad x^2\equiv p\ (\mathrm{mod}\, q),$$

当 p、q 被 4 除余数等于 3 时，一个同余式可解，另一个同余式无解，除此以外，这两个同余式要么都可解，要么都无解。

动心。他小心翼翼地把这颗珍宝和其他发现一起关进他褐色的小皮箱。他还没有作出抉择，究竟是数学还是语言学作为自己终身的事业，因为他在语言学方面同样有浓厚的兴趣和非凡的才能。

错失一次成名的良机，他并不感到惋惜。

转 折 点

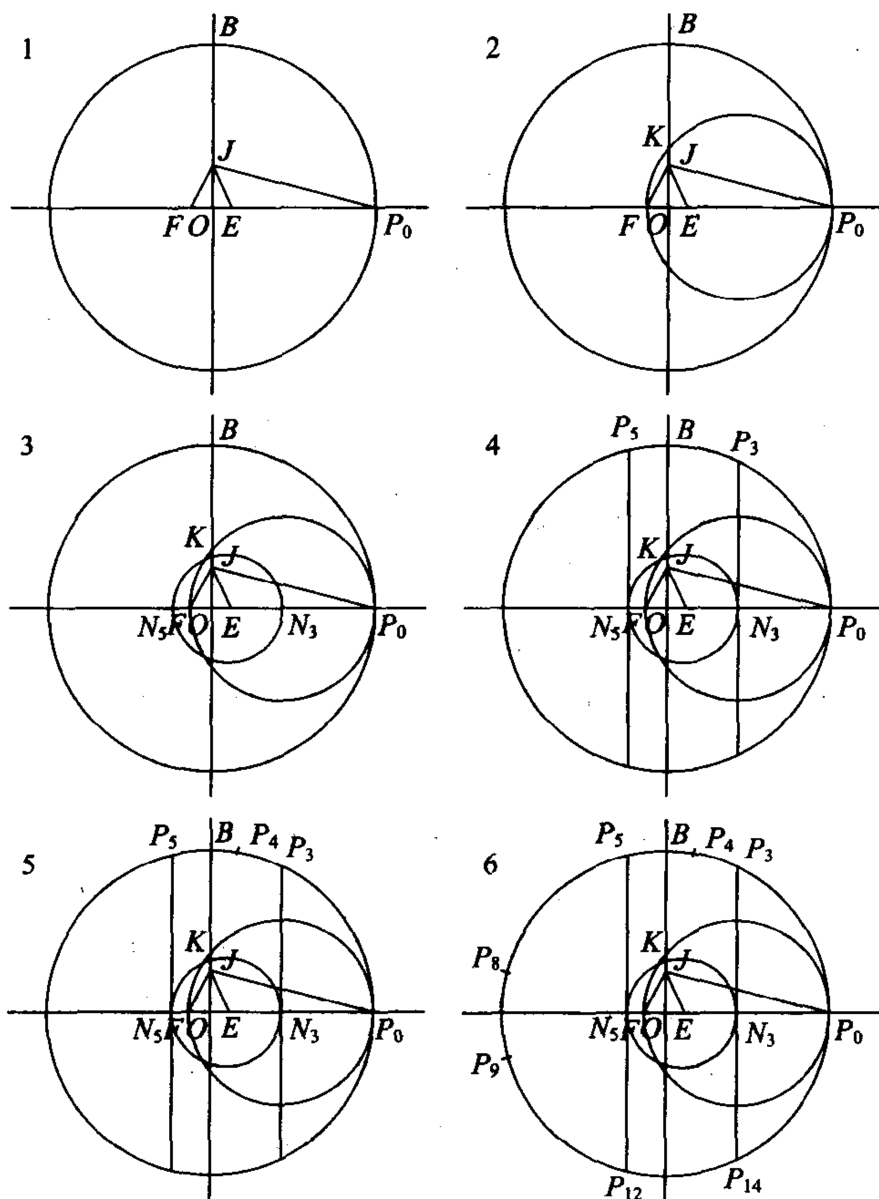
高斯穿过铺着鹅卵石的马路来到小食品铺买面包的时候，他并没有发觉，今年格丁根的春天来得特别早。一连下了两场春雨，大地已经披上绿色的新装。他整天关在小房间里埋头工作。为节省时间，他一次买足一个星期的面包。大家都好奇地揣测着这位仍不合时宜地穿着黑色冬季长袍的青年到底在研究什么。直到距离高斯19岁生日正好差一个月——1796年3月30日——人们才惊喜地得知，这位格丁根大学生用直尺圆规作出了一个正十七边形！这真称得上是数学史上最惊人的发现。

用直尺圆规作正多边形是历史遗留下来的一个“老大难”问题。在古希腊时代，几何学家们认为，要使概念简单明确，不互相矛盾，必须证明它是存在的。在欧几里得几何的公设里承认直线和圆存在。由于它们分别由直尺和圆规作出，因此古典几何学家们认为，从“严密性”出发，任何图形只有当它能用直尺圆规作出的时候才能得到承认。这种古怪的见解，可说是古希腊奴隶社会的产物。在当时，角斗士要在角斗场上手刃对手来求得生存；而那些身上抹着香料油的贵族和奴隶主们是在同对手的辩论中来赢得地位和声誉的。辩论术成为一门重要的学问。为了使自己的演说无懈可击，逻辑的严密性受到极大的重视。几何学当然不能不受到这股思潮的影响。虽然几何学起源于生产，古希腊的学者对于几何在逻辑上的“完美性”比它在生产上的应用更感兴趣。欧几里得使用尺规可以作正三角形，可以作正四边形、正五边形、正十五边形，以及通过反复二等分这些正多边形的边所得的一系列正多边形。例如由正三

角形通过二等分边可以得到正六边形，再得到正十二边形，等等。自然就会提出这样的问题：能不能用尺规作正七边形、正九边形、正十一边形、正十三边形、正十七边形或正十九边形呢？如果能够，怎样作法？在中学里，我们遇到过用尺规来作某个图形的问题，因此，用尺规作一个正十七边形，似乎并没有什么了不起。然而，历史上多少著名的学者，为了回答这个问题，作过种种尝试，倾注了无数的心血。结果都无一例外地失败了。

前人的失败，对于意志薄弱的人无疑是退却的最好借口，但是对于高斯，却只有激起他不可遏止的热情。不过要获得成功，光凭热情不够，还需要有扎扎实实的工作。他认真总结前人失败的记录，发现他们大都采用的是几何的方法。想用这种方法来解决问题，就像瞎子摸鱼——瞎碰！高斯意识到，要摸鱼，首先要弄清哪些地方有鱼；在没有鱼的地方去摸鱼，当然白费气力。这时候他仍在研究数论问题。通过反复尝试，他意外地发现，解决这个难题的线索可以在代数里找到。他巧妙地将尺规作图的几何问题化为一个代数方程，然后通过这个方程的整数解来确定哪些正多边形可以由尺规作出。这就解决了“哪里有鱼”的问题。在这里高斯创造了把问题由一个领域（几何学）转移到另一个领域（代数学）来解决的第一个杰出的例子。高斯在后来的研究中多次采用这类方法。他证明了：使用尺规所能作出的边数为奇数的正多边形，它的边数必定是费马素数或不同费马素数的乘积。这就是说，可以用尺规作出边数是3，5，17，257，65537，…或者边数是它们的乘积的正多边形，但是不能作正七、九、十一、十三或十九边形。因此对那些不可能用尺规作出的正多边形，人们就无须再虚掷时光。谁会想到抽象的费马数同几何竟有这样有趣的联系！根据这条线索，高斯最后成功地用尺规作出了正十七边形。这样，困扰了几何学家达2000多年之久的大难题终于由这位年仅19岁的德国青年给出完满的解答。如图的正十七边形的完整作法只需要一页篇幅；正257边形的尺规作图就要占用80页纸张；而后来数学家盖尔美斯按照高斯方法作出的正65537

边形的手稿要占据整整一只手提箱！这份手稿至今仍保存在格丁根大学的图书馆里。



这次成功使高斯大为振奋。他甚至希望，将来在自己的墓碑上能刻上正十七边形的图案。他决心把毕生精力奉献给数学科学。语言学遗憾地失去一位天才的大师，不过研究古代语言仍是他终身的嗜好。为永远纪念这一非凡成就，在高斯逝世以后，人们为他建起一尊以正十七棱柱作底座的纪念像，庄严地耸立在他风景如画的故

乡不伦瑞克。

宁少毋滥

成就和赞誉没有使高斯陶醉。他怀着不可遏止的热情乘胜前进。新的奇妙的数学思想像春潮般滚滚而来，使他应接不暇。小房间的灯光彻夜通明。为了不让那些朦胧的、稍纵即逝的灵感跑掉，他通宵达旦地进行计算和论证。胜利的欢悦把疲劳冲刷得一干二净。不过道路并不平坦。在攀登的时候，每前进一步都要付出代价。现在他又遇到障碍。度过了多少个不眠之夜，草稿纸足足塞满好几个纸篓，问题仍找不到线索。解决似乎已经无望。不过，他不是个轻易认输的人。一旦认定了目标，他就一定要坚持到底。这时候，时间好像“冻结”，空间也已经“凝固”。不知道自己白天吃的是什么，不记得晚上是否有过片刻安眠。他仔细审查每一步过程，核定每一个结论，分析每一次失败，……这一天终于来到！蓦然间奇迹出现，整个问题的解清晰地呈现在眼前。他欣喜若狂。他取出一个小本子，小心地把它记载下来：

$$\text{EYPHKA!}^{①} \qquad num = \Delta + \Delta + \Delta$$

时间是 1796 年 7 月 10 日凌晨。这就不禁使人想起当年阿基米德在洗澡的时候突然发现浮力定律，兴奋得从浴缸一跃而起，在大街上一边狂奔一边高喊“找到了！找到了！”（*ευρηκα*！*ευρηκα*！）的狂喜心情。高斯在这里以同样的喜悦找到了费马提出的一个困难定理的证明：每个正整数是 3 个三角数[②]之和。

高斯的小册子毫不显眼，淡黄色的封面，只有薄薄的 19 页，里面涂满各种奇怪的符号，记录着从 1796 年 3 月 30 日到 1814 年 7 月 9 日这段时间里他的 146 项研究成果。因为这本日记只供本人使用，

---

① 这是希腊文大写，小写就是 *ευρηκα*，意为“找到了”。

② 三角数是序列 0，1，3，6，10，15，…中的数。

所以每一条往往只写三言两语，十分简短。有的条目简单得甚至连专家也摸不着头脑。比如在 1796 年 10 月 11 日，日记里有这样一条：

Vicimus GEGAN

而在 1799 年 4 月 8 日只简单记着

REV · GALEN

由于高斯总是一个人单独工作，因此他花了几星期以至几个月呕心沥血研究的结晶就成为人们进行种种猜测的永不枯竭的源泉。幸好除了上述两条，日记中其余 144 条的内容倒是清楚的。

实在令人遗憾，这样重要的日记高斯竟始终珍藏着没有公开，直到 1898 年——高斯逝世后 43 年——才在科学界流传。那一年格丁根皇家学会为进行研究，向高斯的孙子借来这本日记，它的影印件后来刊登在高斯全集第十卷上。

高斯日记的内容一披露，轰动了整个科学界。人们第一次了解到，有许多重大成果高斯实际上早就发现，而公开发表得很晚；有的甚至在生前根本没有发表！有关椭圆函数双周期性的内容一直到日记发表的时候人们才知道，以致这个重大成果在日记里整整沉睡了 100 年！1797 年 3 月 19 日的一条清楚表明，高斯已经发现这个成果；后来又有一条，说明高斯还进一步认识到一般情况下的双周期性。这个问题后来经过雅可比①和阿贝尔独立研究发展，才成为 19 世纪函数论的核心。类似的例子不胜枚举。

这样大量的重大发现在日记里竟被埋没好几十年以至一个世纪！面对这一不可思议的事实，数学家们无不大为震惊。如果及时发表这些内容，无疑会给高斯带来空前的荣誉，因为日记中的任何一项无不是世界第一流的成果。如果考虑到这时候的高斯还在靠斐迪南公爵的有限津贴来维持最低限度的生活，就更加使人费解了。尤其

① 卡尔·雅可比（1804-1851）是德国数学家，和挪威数学家阿贝耳共同创立椭圆函数理论，对数论、行列式论、微分方程等也有贡献。

可惜的是，要是高斯把他所知道的都及时公开，就可免得后来的数学家们在许多重要领域长期地在黑暗中苦苦摸索。数学史将大大改写。有的数学家估计，数学可能要比现在先进半个世纪甚至更多。雅可比和阿贝尔就可以在高斯终止的地方起步，而不必耗费精力去重新发掘高斯早在他们出生以前就已经知道的内容；非欧几何的创立也可以足足提前半个世纪。罗巴切夫斯基和鲍耶[①]就不必把他们的才智用在高斯早已经解决的问题上。是的，假如高斯了解今天数学家们的心情，他大概会后悔：真不该无情地把自己的日记锁起来！

为什么会出现这种现象？有人说这是因为高斯的处女作《算术研究》曾经遭到法国科学院的粗暴拒绝。这个不应得的羞辱深深刺伤他的自尊心。从此他下决心，凡是拿出去发表的作品，从内容到形式必须让任何人挑不出毛病。可是，事实并不是这样。1935 年，法国科学院的工作人员为核实这个事关重大的指责，对该院的文件记录作了一次详尽的调查，调查表明，《算术研究》从来没有寄交法国科学院，当然更谈不上被它拒绝了。

其实，高斯对成果采取这样慎重的态度，完全是出于他对工作极端严格的要求。在小时候，他喜欢看父亲和舅舅干活。他们的工作是那样的兢兢业业，一丝不苟。每一枝鲜花，每一块锦缎，都称得上是艺术的佳品。后来他不止一次看到，他所崇拜的伟大先驱阿基米德和牛顿是怎样地对他们自己的作品精雕细刻，精益求精，在严密的一环扣一环的综合论证中深深掩盖着自己内心的激情。他决心遵循他们的榜样。因此，他只发表经过千锤百炼的杰作，不允许有任何缺陷或漏洞。他要求严格的完美，哪怕多一字或减一字都会有损于它的形象。这是件珍品：纯真，完美，朴实无华，有说服力而且要不留斧凿的痕迹。他认为一座宫殿只有把最后的脚手架拆除以后才成为宫殿。正是基于这种信念，他不愿公开自己的日记。因

---

① 亚诺什·鲍耶（1802-1860）是匈牙利数学家，1823 年写出《绝对空间的科学》草稿，这是一个完整的无矛盾的非欧几何系统，1832 年才作为附录发表在他父亲法尔卡什·鲍耶（1775-1856）的一本著作中。

为按照他的标准，有些条目的内容还没有完全成熟。他恪守自己的格言："宁少毋滥"。

这实在令人惋惜。从艺术形式来看，这样的数学瑰宝固然精美绝伦，可是，在数学研究中，思想和方法常常比由此发展而成的定理重要得多。一个杰出的思想可以引申到新的领域产生出意想不到的结果。现在，由于到达终点的所有足迹已经被抹掉，他的许多重要思想只有经过后继者另行发掘才得重见天日。正如雅可比所说："高斯的证明被冻结得硬邦邦的，人们必须先把它融化开来。"他的不少伟大著作只有经过专家们的详尽解释才能为一般人所了解和接受。

另外我们还不应忘记贯穿在整个 18 世纪的数学家之间的激烈争论。他们各持己见，互相指责，由于缺乏严格的论证，在争论中又产生种种错误。为了证明自己的论点，他们往往求助于讽刺挖苦和自吹自擂。这类争论给高斯留下深刻的印象。他出身虽然贫微，却和他的双亲一样，自尊心极强。他极端厌恶和鄙视强词夺理和文过饰非。他担心日记中的内容发表出来会招致无休止的意气用事的争论，对于这类"争论"，他无意奉陪。

个人的荣誉他毫不计较，过于坚硬的成果别人是否容易消化，他无心顾及。他把莎士比亚悲剧《李尔王》中的一段格言工工整整地写在自己在肖像下面：

"大自然，您是我的女神，我一生的效劳都服从于您的规律。"

这句名言再好不过地概括高斯献身科学的光辉的一生。

灵感仅赐福于有心之人

在格丁根大学学习的 3 年（1795 年 10 月到 1798 年 9 月），是高斯一生中成果最丰富的时期。公爵的资助使他不必为生活操心。他身披灰色罩袍，戴一顶无檐的小帽，关起门来潜心研究。一项数论方面的伟大工作在夜以继日地紧张进行。到大学毕业，具有历史

意义的巨著《算术研究》实际上已经完成。那一年高斯在不伦瑞克过了一个秋天，偶尔到黑尔姆斯泰特走一趟，因为黑尔姆斯泰特大学有一座藏书丰富的图书馆，他在那里对著作作最后润色。黑尔姆斯泰特大学已经耳闻高斯的大名，图书馆的管理人员和著名数学家帕夫（1765-1825）热烈欢迎他的光临。高斯就住在帕夫教授的家里，并且成为他们家的好友。殷勤好客的主人为照顾好这位拼命用功的青年的健康，特意为他准备好丰盛的菜肴，每天黄昏还拉着他出去散步。

历史悠久的黑尔姆斯泰特大学依山傍水，景色宜人。暗红色的校舍镶嵌在浓密的绿树丛中，一派庄严肃穆的气氛。他们漫步在蜿蜒的河岸上，迎面扑来野花的芳香，沁人心脾。帕夫像老朋友一样，向高斯畅谈他最新的研究和遇到的困难。教授坦率和善的性格深深博得高斯的喜爱和敬重。他聆听着教授精湛的见解，不时点头称是，偶尔插上一两句切中要害的评论。可惜谦虚的年轻人一句没有提到自己在数论中所取得的重大进展。这本来可以使教授得到同样的收获，甚至是更大的收获。

“晚上休息得好吗？”教授关切地问道。

“嗯，很好。”

“年轻人，你可别瞒我。我半夜醒来，看到你房间的灯还亮着呢。”

教授对客人不分昼夜地工作早有意见，想乘机提出他的忠告：“搞研究不是一朝一夕的事，要顾惜自己的身体。……”帕夫正说得起劲，忽然发觉旁边并没有人跟着，不禁吃了一惊。回头一看，他见到高斯正对着远处农舍闪烁的灯火出神，赶忙过去问个究竟。不料年轻人对他的招呼毫无反应！过了好一会儿高斯渐渐“苏醒”，看到站在旁边不知所措的教授，才想起刚才发生的事情。原来这几天高斯正被费马的一个命题搞得寝食不安。他用通常的方法去证明都碰了壁。这个问题一直萦绕在他的脑际。在散步的时候，高斯猛然发现，为什么不利用分析的方法来证明呢？虽然这种方法一般并

不是用来处理像整数这样一类离散的现象。他愈想愈觉得有理，不知不觉停下脚步，把教授撇在一边。

后来有人问起高斯成功的秘诀，高斯以其特有的谦逊回答道：

“如果别人思考数学的真理像我一样深入持久，他也会找到我的发现。”

好像是为了证明自己的结论，有一次他指着《算术研究》第636页上的一个问题动情地说：

“别人都说我是天才，别信它！你看这个问题只占短短几行，却使我整整花了4年时间。4年来我几乎没有一个星期不在考虑它的符号问题。”

这使人想起牛顿。当问到他怎样取得超过所有先辈的成就的时候，牛顿的答案同样简单：

“因为时时刻刻想到它们。”

真是英雄所见略同。正因为深知自己为每一点滴的成就曾经倾注了多少心血，高斯知道怎样评价别人的工作。他根本不相信所谓牛顿和苹果的故事。他认为，这纯系无稽之谈。要不是牛顿在万有引力问题上已经有长期的酝酿和深入持久的思考，即使苹果落到他的头上也绝不会产生什么灵感。俗话说得好：灵感仅赐福于有心之人啊。

披荆斩棘

金黄的黑尔姆斯泰特的秋天是丰收的季节。高斯满载着数论研究的丰硕成果同帕夫依依惜别，启程返回格丁根。坐在颠簸的马车里，眺望着一望无垠金色的田野，他的心已经飞向未来的战场。在临别前夕，帕夫恳切地向他提议，希望他在黑尔姆斯泰特大学完成博士学位研究工作并且以代数学基本定理的证明作为课题。这是怎么回事？每个中学生都知道，在古典代数中，方程是主要研究对象，而解方程首先要搞清这个方程究竟有几个根。早在100多年前，数

学家从大量实例中认识到，如果把复根也算上，那么一个 n 次方程刚好有 n 个根。这个命题就是所谓代数学基本定理。可是十分遗憾，这样一个带有根本重要性的定理到这时还没有一个令人满意的证明。这不是数学家们的疏忽，忘记了这项工作，只因为它的难度远远超过人们的想像。达朗贝尔花了九牛二虎之力，试图给出一个证明，最后以失败告终；帕夫本人也作过认真的尝试，结果同样不妙。教授一眼看中了高斯。他发觉这位不折不挠、才气横溢的青年才是挑起这副重担的真正人选。他没有顾虑自己的面子，直率地谈出自己的见解。高斯虽然不能接受对自己的恭维，不过，教授的建议的确符合他的心意。一个问题要不是十分重要而又异常困难，就甭想吸引高斯的注意。因此，他欣然接受这场挑战。

可是，战斗刚刚打响，意想不到的困难接踵而至。格丁根大学毕业以后，斐迪南公爵在不伦瑞克所承诺的义务即告完成。今后就得独立谋生。按理说，像高斯这样的高材生，应该不难在格丁根大学找到一个适当的工作。可是，寻找工作用不上数学的逻辑推理，需要的倒是找靠山，拉关系，或至少会低声下气地去求情。这些条件高斯一条也不具备。他不愿去自讨没趣。他想收几个学生当私人教师。可是，这也不容易。高斯的讲课和他的著作一样字斟句酌，言简意赅，他不重复在他看来浅显易懂的道理，这使得一般学生远远跟不上他敏捷的思路。因此，尽管高斯在格丁根已经颇有名望，但是所收的学生寥寥无几。时断时续的学费收入仅够他购买每天需要的面包和纸张，至多还允许他偶尔喝上一杯咖啡。本来指望《算术研究》能够早日出版，可是由于出版商财政困难，迟迟不能付印。房租已经拖欠好几个月。房东梅兹太太投来的不信任目光使高斯忐忑不安。只有在研究的时候才得以摆脱烦恼，这时候他又才思横溢，充满信心。可惜，这样的时间愈来愈少。梅兹太太故意的大声咳嗽和拉开门缝来探头探脑，大大干扰高斯的思考。辛苦的工作，营养不良再加上心情烦恼，终于使他病倒。躺在咯吱作响的床上，面对斑驳的墙壁，他饥肠辘辘，但是脑子里仍在思考博士论文的细



节。他放不下在黑尔姆斯泰特接受的挑战。有时候已经坠入昏睡之中，还听见他在喃喃自语："为什么？……为什么？"在致斐迪南公爵的信中，高斯从来不提自己生活的窘况。不过，这个消息还是传到公爵的耳朵。这大概是好心的巴蒂尔给公爵报的信。斐迪南再一次雪中送炭。他为高斯偿还债务并且决定继续提供津贴，让他安心研究而不致受贫穷的困扰。在公爵的心目中，高斯永远是不伦瑞克的骄傲。

高斯果然不负众望。第二年夏天，标志着代数学上一个里程碑的博士论文《每个单变量有理整函数可以分解为一次或二次实因式的新证明》在黑尔姆斯泰特大学顺利通过。在这篇论文中，高斯以其特有的对逻辑和数学严密性毫不含糊的要求，证明了这个代数学基本定理。在证明中他巧妙地利用了几何图形的性质，表现出巨大的创造性。帕夫看着这个证明，激动不已。他握住高斯的双手连声赞叹："好！好！好啊！"他的欣喜之情不亚于高斯本人。论文只有一处错误，这就是题目中的"新"字。高斯应该把"新"字去掉，因为在他以前没有人对这个定理作出过真正的证明。这个定理后来高斯又先后给出了 3 个证明，作出第四个证明的时候，他年已古稀了。

在这里不能不提到高斯对复数不可磨灭的贡献。在整个 18 世纪，由于复数得到卓有成效的应用，使数学家对它逐步建立起信心。现在高斯对代数学基本定理的证明，由于它依赖于对复数的承认，所以进一步巩固了复数的地位。其实，对高斯来说，复数早已不成问题。他在两年前的一篇关于复数的论文中，已经把我们今天熟悉的用平面上一个点来表示复数以及复数运算的几何意义解释得一清二楚。现在看起来，这些似乎相当简单，不值得在这里多费笔墨，因为今天每一个中学同学都已经不假思索地把复数作为实数的自然扩张接受下来。可是，我们回顾一下复数的历史就会发现，人们经历了一段多么漫长而艰辛的道路，才达到这一步。

复数是 16 世纪在解二次方程的时候出现的新的数。在 1545 年

出版的《大艺术》一书中，数学家卡尔达诺[①]在解方程

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

时得到 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$ 两个根。当时的人们只知道，两个符号相同的数相乘结果是正数。可是，这里的 $\sqrt{-15}$ 意味着两个符号相同的数相乘结果等于 -15。这是不可思议的。由于不了解 $\sqrt{-15}$ 究竟代表什么意思，这种数一直到1700年实际上还没有人理睬。笛卡儿摒弃它。“虚数”这个名称就是他提出来的，意思就是“不存在”。牛顿也不认为复数有多少意义。在他看来，复根只是“使不可解的问题显得像是可以解的样子”而已。至于另一位大数学家莱布尼兹，更有一段为人们广泛引用的“名言”：

“圣灵在分析的奇观中得到超凡的显示，这就是那个理想世界的征兆，那个介于存在与不存在之间的两栖物，那个我们称之为虚数的 -1 的平方根。”

在莱布尼兹看来，$\sqrt{-1}$ 是个怪物。它既存在又不存在，是上帝在分析中显灵！这样的看法在当时不足为奇，因为复数缺乏物理意义，大家还不认识它。要知道甚至到19世纪，复数在流体动力学中发展并且成功地应用相当一段时间以后，许多大学者，其中包括剑桥大学的教授们，仍然保持“一种对讨厌的 $\sqrt{-1}$ 抱有不可动摇的厌恶心理”，极力抵制它的出现。可见高斯在这个陌生领域里这样早就能够运用自如，并且赋予复数以一种普遍可以接受的解释，该具有多么大的勇气和何等深刻的洞察力！

加七道封漆的著作

1801年是数学史上一个重要的年头，那一年，被出版商一拖再拖的高斯第一部巨著《算术研究》终于问世。有人认为，这是他一

---

① 杰罗拉莫·卡尔达诺（1501-1576）是意大利数学家和医生，他和他的学生对三次和四次方程求解作出贡献。

生中最伟大的作品。曾经悲观地以为“矿源已经挖尽”、数学正濒临绝境的拉格朗日在《算术研究》中兴奋地看到希望的曙光。这位68岁高龄的老人致信高斯表示由衷的祝贺：

“您的《算术研究》已立刻使您成为第一流数学家。我认为，最后一章包含了最优美的分析的发现。为找到这一发现，人们作了长时间的探索。……相信我，没有人比我更真诚地为您的成就欢呼。”

和高斯的其他著作一样，在《算术研究》序言一开头，作者就明确说明它的范围：

“本书所研究的是数学中的整数部分，分数和无理数不包括在内。”

著作的头三部分是研究同余式理论，第四部分发展了二次剩余理论，其中有著名的二次互反律的严格证明。著作的第七部分也是最后一部分使全书达到顶峰。作者巧妙地利用前几部分的研究结果，把代数方程 $x^n=1$ 的根的讨论应用于圆的分割问题，从而把数论、代数和几何交织成一幅绚丽无比的图画。方程 $x^n=1$ 是几何问题用尺规作正 n 边形的代数形式，而同余式 $x^m\equiv 1 \pmod{p}$ 是把代数和几何编织在一起的彩线。一切是那么精练，优美，天衣无缝，真不愧为一件绝世的珍品！是的，著作中的某些内容曾经有人完成过。但是，高斯以自己独特的观点，把整个问题重新加以处理，并且加上许多独创，因此，从他的一般公式，可以很容易地推导出前辈们得到过的孤立的结果。例如，费马曾经发现一个美妙的定理：每个形如 $4n+1$ 的素数是两个平方数的和。他自己提出了一个非常困难的“无限递降法”，但是并没有给出证明。后来大数学家欧拉为得到这个证明，整整奋斗了7年。现在高斯从二元二次型[①]的一般讨论，很自然地就可以推导出这个结果来。

---

① 形如 $ax^2+2bxy+cy^2=m$（a、b、c、m 为任给的整数）的不定方程称为二元二次型，它的解 x、y 限制为整数。

可能有人以为，包括一切实数和复数的代数理论比只包括整数的算术理论（数论）要更加困难。可是，许多大数学家的切身体会恰恰相反。拉格朗日在经过几番认真的较量以后，不得不沮丧地承认，在数学的所有学科中，数论给他带来的“麻烦最多”。拉普拉斯比较有“自知之明”，虽然他认为由法国数学家费马提出的至今还没有得到证明的许多命题最好由法国数学家自己来解决，可是他在重重困难面前，只好望题兴叹。达朗贝尔也吃惊地发觉，数论“远比表面看上去要困难得多”。……为什么会这样呢？不妨打一个比喻。我们知道，整数和分数都属有理数。有理数被有理数除仍是个有理数。这表明在有理数之间施行除法完全不用担心，它不会超出有理数的范围。但是，整数的情况就不同。整数被整数除不一定是整数。所以，在数论中只限于整数，无异于在工作一开始就缚住自己的手脚。好比一位体操运动员，她能够在平地上轻松地接连做几个漂亮的后手翻；但是如果把平地换成一根狭窄的平衡木，要做一套同样的动作就不知要困难多少倍！这是为什么数论比代数更困难的一个原因。

《算术研究》似乎任何一个在中学学过普通代数的同学都可以理解，不过，它完全不是写给初学者看的。实际上，即使对专家来说，它也非常难懂。由于全书有 7 个部分，人们风趣地称它是部“加七道封漆的著作”。刚开始，许多有才能的青年数学家接受起来感到十分吃力，等到他们逐渐认识到这部著作的价值，打算好好研究一番的时候，不料书店宣告破产，书买不到了。连高斯最得意的学生爱森斯坦（1823-1852）也不例外。狄利克雷①的运气不错，他在书店宣告破产以前购得一本。《算术研究》成了他最心爱的宝贝。他把书藏在罩袍里贴胸的地方，走到哪里带到哪里，一有空就取出来阅读。晚上睡觉的时候，他把它垫在枕头下面。在睡觉以前他总



① 古斯塔夫·狄利克雷（1805-1859）是德国著名数学家，在分析、数论等有多方面的贡献。

还要“啃”它几段，然后在半夜醒来的时候再重读一遍，力求把它彻底搞懂。功夫不负有心人。凭着这股坚韧不拔的毅力，狄利克雷终于第一个打开“七道封漆”。后来他以通俗的形式对《算术研究》作了详细介绍和解释，使这部艰深的作品逐渐为较多的人所理解和掌握。高斯逝世以后，狄里克雷接替高斯成为格丁根大学的数学教授。

这里还有一段感人的故事。1849 年 7 月 16 日正好是高斯获得博士学位的 50 周年。格丁根举行隆重的庆祝活动。有一项节目真可谓别出心裁，它要高斯用《算术研究》中一页原稿来点燃自己的烟斗。狄里克雷正好站在高斯身旁。他看到这个情景完全给惊呆了。在最后一刹那，他不顾一切地从自己恩师手中抢下这页原稿，并且把它珍藏起来。直到狄里克雷逝世以后，编辑人员才在他一大堆手稿中重新发现它。

高斯在晚年的时候说：“《算术研究》已载入史册。”他无疑是对的。在 17、18 世纪，数论还只是互不联系的特殊结果的混合物，现在它表现出一致的形式，形成了一个系统。随着《算术研究》的发表，这门数学学科提高到同代数、几何和分析同样的地位。高斯形容数论是“数学的皇后”。为什么是皇后？大概就因为它优美动人又高高在上，一般人极难接近的缘故吧。而正式为数论戴上皇后桂冠的不是别人，正是卡尔·弗雷德里希·高斯。

《算术研究》出版以后，高斯不再以纯粹数学作为他惟一的兴趣。但是，数论毕竟是他第一个心爱的领域。他本来打算能够找到时间来完成他的第二卷，可是到晚年，他不无遗憾地发现，自己雄心勃勃的计划未能如愿。

神秘的小星

19 世纪的到来，标志着高斯事业第二阶段的开始。

在新世纪的元旦，西西里岛天文台台长、意大利天文学家皮亚

齐（1746-1826）发现一颗小星正朝着太阳方向移动。开始，他以为这是颗彗星。可是，跟踪观察了几天，发现它原来是颗小行星。这一发现非同寻常。因为，自从1776年德国天文学家提丢斯提出一条求太阳和诸行星间的平均距离的经验法则以来，天文学家和哲学家之间长期存在着争论。哲学家们认为，太阳系除了现有的7颗行星（水星、金星、地球、火星、木星、土星和天王星）以外，不存在别的行星。因为在他们看来，7是一个具有特殊含义的数字。哲学家黑格尔就这样断言：

“正好是7颗。一颗不多，一颗不少。再找是白费时间。”

但是，天文学家们不愿接受哲学家的武断判决，他们认为提丢斯的法则有一定指导意义，而根据这条法则，在距离太阳260 000 000英里处附近应该存在一颗行星。他们怀着这种信念，耐心地日复一日地在苍穹中苦苦寻找它的踪迹。可是，将近20年过去了，搜索一无所获。现在决定性时刻到了！这桩旷日持久的公案眼看就要解决。不料横祸飞来：2月21日皮亚齐突然病倒。观察被迫中断。他在病床上挣扎着把观察结果写信通告欧洲同行。可是，事不凑巧，这时正值拿破仑远征埃及，地中海已经被英国舰队严密封锁。等到欧洲的天文学家们得知这个姗姗来迟的消息，小星已经靠近太阳，消失在太阳的耀眼的光芒之中！

度过了无数个不眠之夜的天文学家以至整个学术界都在热切地关注着这颗小星的下落，希望能够依靠不足的数据在茫茫星海中重新找到这颗失踪的小星。可是谈何容易。要使轨道足够精确，望远镜不致找不到，计算工作量竟庞大到这种程度，不但许多数理天文学家望而却步，即使是20世纪30年代的计算机也深感力不从心。难怪牛顿把它列为数理天文学中最困难的问题之一。

大家不约而同地把期待的目光转向高斯。公爵和朋友们希望他出来一显身手，不要再埋头于深奥的数论研究，过默默无闻的隐居生活。他们的希望不无根据。复杂的计算的确是高斯一向的爱好和罕见的特长。在平时，他不是在沉思默想，就是在不停地计算。堆

满他书桌的草稿上都是用清晰的笔迹写着的一行行密密麻麻的算式。他的许多数论定理正是通过验证无数个数据而推理得出的。在他的著作中，复杂的计算比比皆是。远在任何类型计算机问世以前，他的许多计算已经达到小数后21位。高斯并不就此满足。他还要把整页整页的计算压缩为一目了然的几行。三角函数表、对数表等各种数表他无须查阅，因为他能背出所有这些数的前几位数字。使用有错误的表格反而使他高兴，因为这使他得到有趣的消遣——修正表格中的错误！毫无疑问，再没有人比高斯更胜任这一重任。在生活上长期受他们关心照顾的高斯不愿使他们失望，他怀着不胜留恋的心情卷起他数论研究的宏伟蓝图，投身到浩如烟海的天文计算之中。轨道果然计算出来。正好经过一年，1801年的元旦，高斯的朋友，德国天文学家奥伯斯，在高斯计算的轨道上重新找到这颗调皮的小星——谷神星。不久智神星和其他姐妹小行星也被紧盯着的望远镜先后找到。这种轨道的计算在上一世纪曾经花了欧拉3天时间（有人说他的一只眼睛就是因此失明的），经过高斯改进，现在只需要辛苦几个小时。高斯使它成为一种方法，一种固定的程序，只需3个观测数据（包括时间和位置），轨道就可以计算出来。这就是至今仍在轨道计算中应用的高斯方法，稍加改进就完全可以适用于现代计算机。

短暂的春天

如果说《算术研究》由于过于艰深，真正能欣赏它的人屈指可数，那么谷神星的计算，无疑是妇孺皆知的轰动性的新闻了。随着谷神星的发现，高斯声誉大振。贺电、请柬、奖金、学位证书和科学院院士头衔纷至沓来。格丁根市政府授予高斯“格丁根巨人”的光荣称号。斐迪南公爵也立即增加对他的津贴而不是仅够勉强维持生活。在一次学术会议上，德国著名自然科学家亚历山大·冯·洪堡向法国大数学家拉普拉斯问起，谁是德国最大的数学家。拉普拉

斯毫不犹豫地回答：

“帕夫。”

洪堡大吃一惊，因为他极力推荐高斯担任格丁根天文台台长，就反问他：

“那么高斯呢？”

“哦，”拉普拉斯回答道，“高斯是世界最伟大的数学家。”

正当玫瑰花瓣雨点般向年轻王子撒来的时候，1805 年 10 月 9 日，喜讯传来，高斯和约翰娜·奥斯芙正式结婚。这时他 28 岁。高斯在不伦瑞克和约翰娜结识，他对这位沉静美貌的少女一见钟情。可是，这位在数学战场上叱咤风云的战将，在爱情王国中却仍旧羞怯得像个国民小学的小学生。他不好意思在心爱的姑娘面前表露感情，只好用不断写信来向她倾诉自己热烈的爱慕。这样整整追求了两年，有情人终成眷属。婚后第三天，高斯写信给格丁根大学的老朋友法尔卡什·鲍耶，充满难以抑制的激动心情：

“我多么幸福。生活在我面前，就像阳光灿烂的永恒的春天。”

很快生下 3 个孩子：约瑟夫、米娜和路易。大儿子约瑟夫继承了父亲的心算才能，忠厚诚恳，最得高斯宠爱。不料路易刚生下，心爱的约翰娜猝然去世！高斯悲恸欲绝。灿烂的春天霎时间坠落到严酷的寒冬。由于年幼孩子的关系，高斯于第二年再度结婚，新娘米娜·华特克是约翰娜生前的好友。但是即使过了很久，每当谈起约翰娜·奥斯芙，他总怀有深深的眷恋之情。

厄运并不就此为止。1806 年，高斯失去了父亲；斐迪南公爵又在德国中部同拿破仑一次决定性战役中负伤，不久身亡。从此他就得自己谋生。这时当然毫无困难，他的声誉已经遍及整个欧洲。彼得堡科学院千方百计想请他去接替欧拉的位子，因为自 1783 年欧拉去世以来，他们还没有找到一位合适的继承人。德国不愿意看到这位世界最大数学家被人夺走，特聘他担任新建的格丁根天文台台长，并适当为格丁根大学兼课。这项职务为高斯提供一个安静的工作环境，他愉快地接受了。

这时候拿破仑正忙于掠夺德国，格丁根的区区薪金仅仅够维持高斯一家的温饱。高斯对此毫不介意。实际上，奢侈豪华从来没有接近过这位王子。从少年时代起，他就坚贞不渝地献身于科学。他对自己作品的要求近乎苛刻，而对生活一无所求。高斯的一位朋友谈到他的生活时这样说：

"从青年、晚年直到去世，高斯始终十分俭朴。一间小书房，一张铺着绿色台布的桌子，一张白色写字台，一张窄小的沙发，70岁后添了一把安乐椅，一盏带罩的油灯，没有火炉的卧室，简单的



奢侈和豪华从来没有接近过这位王子

食物，一件长罩衫和一顶天鹅绒小帽，这就是高斯的全部需要。”

如果说高斯的生活既简单又节省，那么，法国入侵德国就更加简单节省。胜利者的损失全部要由战败国赔偿。几乎征用了一切运输工具，以便把大量的财物源源不断地运往法国。300多万普鲁士居民在1807年到1812年短短5年内，要交纳10亿法郎以上的战争赔款。贪婪的拿破仑对清苦的高斯同样没有放过。作为格丁根大学教授兼天文台台长，他得为拿破仑战争金库提供2000法郎。不用说，按他本人微薄的薪水根本缴不起这笔巨款。

有几位朋友劝高斯以他的名义呼吁拿破仑豁免这笔“赔偿金”。假如他提出来，拿破仑大概会十分乐意借机来炫耀自己的“仁慈”。高斯当然不会这样做。他不会把数学、把自己的荣誉和自尊出卖给拿破仑。他没有忘记斐迪南公爵的死，更不会忘记拿破仑军队在德国的所作所为。

不久，朋友奥伯斯给他寄来2000法郎。他在信中对像高斯这样的大学者仍免不了受到勒索，感到愤慨。感谢慷慨的朋友的同情，高斯把钱退了回去。拉普拉斯等国内外其他朋友也纷纷寄钱来争相卸除他的重负，但是都被高斯一一婉言谢绝。大家一定已经得悉他决不接受馈赠。最后有人灵机一动，从法兰克福给他寄来1000盾而没有署名。高斯不知赠送者的姓名，无法退回，只好领情收下。

斐迪南公爵不幸阵亡，祖国在拿破仑军队蹂躏下满目疮痍，家庭经济状况的窘迫以及亲爱的约翰娜的去世，这一切使高斯深感痛苦。他从来没有向朋友们流露过这种心情。在他们面前，他总是谦和而且冷静。只有一次，他在自己的数学手稿中泄露出来了。在一份关于椭圆函数的手稿中，突然出现一行非常漂亮的铅笔字：

“对我来说，死比这样的生活更亲切。”

工作成了他摆脱痛苦的一剂良药。

幸喜，阴郁的心情很快过去。第二次结婚以后重新有了妻子来

照应他年幼的孩子。工作又有了安静的环境。他以旺盛的精力投入新的战斗。

忍辱负重

1809年，高斯第二部杰作《天体运行理论》正式发表。书中详尽地讨论了根据观测数据如何确定行星和彗星的轨道，由此建立了一系列天文学计算中的重要公式，还介绍了他创立的最小二乘法原理和高斯分布曲线①。它为天文学提供了完整严密的数学理论和快捷有效的计算方法，堪称为数理天文学中一颗晶莹夺目的明珠。

可是高斯万万没有料到，给他带来崇高荣誉的《天体运行理论》，也捎来了无穷的烦恼，特别是他同勒让德的关系因此而蒙上阴影。勒让德是位有才能的数学家，认真细心，品格高尚。不巧的是他所研究的许多课题，如数论、几何的基础和最小二乘法原理等恰好和高斯类同。他独立研究出不少成果，有的还发表在高斯之前。例如最小二乘法，勒让德在1806年就宣布这一原理，而高斯在这次《天体运行理论》出版的时候才发表。在书中，高斯作为一个有关的事实顺便提到，他自己早在1794年就已经实际应用这个原理了。他“顺便一提”不要紧，却一下子剥夺勒让德多年辛苦研究的优先权。勒让德大为恼火。他觉得高斯已经享有偌大的声誉，还来抢别人的优先权，实在欺人太甚。因此，他讲了一些动感情的话。高斯理解勒让德的心情，因此始终克制着，保持缄默。高斯一生从来没有把荣誉放在心上。他认为重要的是作出成果。同成果本身相比，究竟是谁搞出这一成果就显得微不足道。不料他的忍让态度被不明真相的同行误以为是默认。他们对勒让德深表同情。指责逐步升级，甚至有人说高斯“沽名钓誉”。舆论对他相当不利。高斯心想把事实公诸于世为自己洗刷清白，可是继而一想又犹豫起来。他耳闻目

① 高斯分布曲线，又称正态分布曲线，是描述随机现象的一种最常见的分布曲线。

睹的科学家之间关于发明优先权的面红耳赤的争论一幕幕出现在眼前。他一向把这类争论看做是神圣的科学交响乐中刺耳的噪声。难道自己要重蹈他们的覆辙？当然不能。这根本违背自己献身科学的理想。不错，受委屈的滋味不好受，但是毕竟算不了什么。是非曲直可以留给历史去作结论。即使真相被歪曲，那也只是个人的委屈。摆在面前的课题全力以赴地去探索还来不及，哪有功夫喋喋不休地去作那些无谓的争论？想到这里，他不觉轻快地吁了一口气。这样，科学界的这场轩然大波，人们听不到高斯任何公开的辩论。只有在给朋友的一封信中，高斯提过寥寥一笔：

"1802 年我把整个事情告诉过奥伯斯。勒让德要是不信，可以去问奥伯斯。他那里有记录。"

尽管这样，这场有来无往的"争论"还是带来了不幸后果，勒让德本人因为这场风波错失了同高斯琢磨切磋的良机不说，就连比高斯年轻 27 岁的雅可比也由于受勒让德的影响，没有能获得高斯对椭圆函数的及时指导而多走了冤枉路。

一波未平，一波又起。不久，学术界又有人在窃窃私语。说高斯妒贤嫉能，不欢迎别人特别是年轻人的成就，他只关心自己。柯西发表关于复变函数理论的重要论文时，高斯没有对这位青年说一句赞扬和鼓励的话；后来他看到哈密顿论四元数的杰作，同样没有表现出任何热情；……说的人头头是道，证据确凿，使不明真相的人不由得信以为真。听到这些议论，深知高斯为人的朋友们都坐不住了。他们敦促高斯这一次无论如何要出来澄清事实，以正视听。然而，这一回他们又大失所望。对于朋友们的劝告，高斯只有淡淡一笑。他既不申辩，也没有说明原因，依旧令人不解地保持沉默。朋友们感到大惑不解。因为谁都不知道：如果公开赞扬柯西和哈密顿，高斯就不能不提到他自己的工作。早在柯西着手研究以前，高斯已经抓到问题的关键，有关这方面的论文本可以是他又一篇杰作。而哈密顿四元数理论的核心，在高斯的日记里至少已经沉睡了 30 多年！事情十分清楚，这样一来势必要剥夺这两位青年的荣誉，同时

会给自己招来误会。这两者都是他不愿看到的。“勒让德事件”的教训他记忆犹新。树大难免招风，有人要议论就让他们议论吧！值得欣慰的是，柯西和哈密顿工作的意义有目共睹，没有自己的赞美，他们照样成长得很好。

今天，随着高斯生前日记、手稿和书信的详尽发表，真相大白于天下。他生前所蒙受的一切不白之冤得到彻底昭雪。这些无声的记录以最雄辩的方式证明了高斯的人格：他忍辱负重，不计个人名利得失，默默忍受着人们误解和责难。他的崇高品格和广阔胸怀，博得人们的深深敬仰。在历史上，像高斯这样品学兼优的科学家是罕见的。难得的不仅在于他在生前所享有的无与伦比的声誉，尤为可贵的是，随着时光的流逝，他的名字并没有被人遗忘。恰恰相反，由于历史风雨的冲刷，他的道德品质和学术上的深刻见解愈益焕发出光彩夺目的光芒。

向传统挑战

高斯抬起头，凝望着雾气缭绕的山峦，心潮起伏。他的面前放着一本摊开的新书《平行理论的几何研究》，作者是喀山大学校长尼古拉·罗巴切夫斯基。他在著作中提出一种与传统的欧几里得几何截然不同的几何——非欧几何，它的发现，使几何学发生一场深刻的革命。不过，对高斯来说，这种理论并不陌生。至少，在30年代，高斯就曾经看到过罗巴切夫斯基在这方面的论文；而实际上，早在高斯16岁的时候，他本人就预见到非欧几何的存在了。可惜他只满足于发现这种理论而不愿把它公开，因为它同当时在知识界占统治地位的康德哲学直接相违背。康德哲学把欧几里得几何说成是先于经验而存在的，是惟一的和必然的，而非欧几何认为，欧几里得几何只是客观存在的许多空间形式中的一种罢了。高斯担心，公开发表这种“叛逆性”的理论，不仅会遭到传统的强烈反对，还不可避免地会把他卷入他所极端厌恶的争论的漩涡。因此高斯对非欧

几何一直讳莫如深。记得几乎和罗巴切夫斯基发表论文的同时，大约在 1833 年前后，老朋友法尔卡什·鲍耶的儿子亚诺什·鲍耶有一篇论文附录在他父亲的著作《将好学青年引入纯粹数学原理的尝试》后面，题目叫《绝对空间的科学》，其中也论述过非欧几何的思想。法尔卡什还特意为此写信征求高斯的意见。高斯对亚诺什的创作精神大大夸奖一番，而对论文却一笔带过：他不能称赞亚诺什的文章，因为那样无异于称赞自己。雄心勃勃的亚诺什一下子被剥夺了优先权，感到心灰意懒，发誓从此不再从事数学著述。回想起来，高斯不免感到惆怅。如果从自己 16 岁那年算起，50 多年过去了。科学界对非欧几何的怀疑和敌视并没有改变。要人们摆脱传统成见去认识一个真理，实在是件难而又难的事情啊。“这个俄国人不简单，不愧是一位真正的几何学家，既严谨又富于洞察力。尤其是他的胆魄和那百折不挠的精神，更令人肃然起敬。”高斯完全理解，罗巴切夫斯基做到这一点需要何等的勇气，他将承受有形的和无形的巨大压力，并且付出沉重的代价。想到这里，高斯不由得离开座位来到窗前。树枝已经吐出新芽，大地一片翠绿。春天来啦。他推开窗户，深深地吸了一口气。他意识到，自己再也不能保持缄默。应该为非欧几何、为几何学新纪元的到来说几句话。即便不公开站出来讲（因为他对由此可能招来的“愚人们的叫嚷”深感厌恶），至少也要在知心朋友中阐明自己的观点。他知道，自己的表态对遭人奚落的非欧几何和这位俄国人，决不是无足轻重的。这一次情况完全不同。如果说柯西和哈密顿的成果被数学界奉为至宝，那么非欧几何在他们的心目中不过是令人厌恶的丑陋的怪物。对于珍宝，只要你声称其中也有你的一份，不明真相的人准会怀疑你企图浑水摸鱼；可是对非欧几何这只怪物，传统的数学家们见到它躲都来不及，谁也不会羡慕你同他有密切的联系。想到这里，高斯快步回到桌前，决定立即给他的一位朋友舒马赫尔写信，推荐罗巴切夫斯基的论文，并且毫不犹豫地宣布自己具有同样的见解：

“不久前我有机会重读罗巴切夫斯基的论文。……您知道，我

对此抱有同样的观点已有 54 年。从那时起并没有任何改变。……我建议您把注意力集中在这样的著作上，读它会使您大受教益。”

根据高斯提议，格丁根皇家学会选举罗巴切夫斯基为通讯会员。这是国际上对罗巴切夫斯基几何的第一个正式承认，也是对处境困难的罗巴切夫斯基本人的有力支持。

高斯同法国女数学家索菲娅·热尔曼（1776-1831）的真挚友谊同样感人至深。

索菲娅出身于巴黎的一个富商之家，比高斯大一岁。她从小酷爱科学，特别是数学。由于是女性，她被拒于巴黎综合工科学校大门之外。不过靠着父亲的关系，她可以借到这个学校的学生所记的教授的讲课笔记。通过不懈的努力，她在声学、弹性的数学理论和数论等方面都取得了出色的成果，成为近代数学史上第一位杰出的女数学家。看到高斯的《算术研究》，她深深地为作者的天才所折服。她决定给他写信报告自己在这方面的研究成果。顾虑到当时普遍存在的对女性科学家的成见，她改用一个男性的化名——勒布朗；不这样改一下，她担心自己的信将被原封不动地退回来。高斯对这些结果极为重视，立刻写了热情的回信。从此两人通信频繁，关系日渐密切。不久拿破仑占领汉诺威。索菲娅通过关系向法国帕尼蒂将军说情，请他注意保护高斯，以免重演当年阿基米德的悲剧，并且对这场给德法两国人民带来灾难的战争深表遗憾。高斯由此得知勒布朗原来是位弱不禁风的女子，不胜惊讶。他感谢索菲娅的关怀，并且毫不掩饰他的激动心情：

“当我得知尊敬的 M·勒布朗原来是高贵的索菲娅·热尔曼的化名，我该怎样向您描述我的惊羡之情呢？我简直难以置信她所提供的光辉榜样。爱好一般的抽象科学，特别是爱好整数之谜的人，寥寥无几。对此没有人感到奇怪，因为这门崇高科学的令人销魂的妩媚仅对那些敢于深入虎穴的人才显露出来。根据我们的习俗和偏见，由于性别的关系，她必然要遇到比男性多得无比的困难来使自己从事这项棘手的研究，并克服各种障碍，深入到最核心的部分。

因此她无疑具有可贵的勇气、非凡的才能和过人的天赋。”

在信上他愉快地签上日期：不伦瑞克，1807 年 4 月 30 日——我的生日。对女性科学家这样开明大度在高斯的时代是引人注目的，在保守的德国更可以说是没有先例的。可惜，不伦瑞克同巴黎远隔千里，高斯和索菲娅没有机会见上一面。由于是女性，索菲娅在法国没有任何学位，也不担任任何科学职务，只在 1816 年由于《弹性的数学理论》赢得过法国科学院奖金。尽管困难重重，高斯决心向传统挑战。经他再三推荐，格丁根大学决定授予索菲娅名誉博士学位，开创了垂范后人的先例。令人惋惜的是，学位尚未授予，索菲娅不幸在巴黎遽然病逝。

十分凑巧，19 世纪最有名的女数学家柯瓦列夫斯卡娅（1850-1891）的名字也叫索菲娅。她也是从格丁根获得博士学位的，而当时的柏林大学就因为她是女性，不仅拒绝她的学位申请，连到教室听课都不允许。近代最著名的女数学家爱米·诺特（1882-1935）也是格丁根“出身”。但是，纳粹上台以后，不顾格丁根同事们的强烈抗议，这位犹太血统的世界最富有创造性的女抽象代数学家被驱逐出德国。美国宾夕法尼亚的布林莫尔学院热情地接待了她。在法西斯的魔影下，格丁根失去了高斯所珍视的并且一生为之奋斗的自由。

硕果累累

1820 年前后，高斯开始从事大地测量的理论研究和实际工作。1821 年到 1848 年间，他担任汉诺威王国和丹麦政府的科学顾问，负责用三角测量技术对汉诺威进行大地测量。对大地进行测量有多方面的原因。航运、贸易的发展和频繁的战争，需要绘制各种精确的地形图和地理图；同时，它可以搞清当时一个迫切的科学问题：地球是个什么样的球体。知道了地球的精确形状，就可以用来验证牛顿万有引力定律，因为，对这个极端重要的定律当时还存在疑虑。

更有一个重要的原因：高斯想通过测量一个大三角形内角之和来检验周围的三维空间是否具有欧几里得几何的平直性。可惜由于测量的三角形还不够大，而没有获得理想的结果。尽管这样，高斯的工作对科学地设计和进行高精度大地测量有巨大的指导意义。

在数学上更有意义的是，要绘制地图就需要研究曲面理论，因为地图是平面而地球表面是球面。由于我们无法把球面切开来摊平，因此，要寻找一种形状和球面相接近的曲面，使它不必拉伸，切开来就能够铺平。在这期间，高斯对曲面理论作出了极其重要的贡献。1827 年，《曲面的一般研究》正式发表。它的出版决定了微分几何的基本方向；并且启发了高斯的学生贝恩哈德·黎曼在 1854 年创立黎曼几何，成为爱因斯坦广义相对论的数学基础。在这以前，曲面一直被作为三维欧氏空间中的图形来研究。高斯在论文中证明：曲面的所有性质都可以由曲线的长度（ds）来确定。既然这样，人们就可以忘掉曲面位于三维空间这个事实，而把曲面本身看做一个空间。如果把球面本身当作一个空间来研究，那么它的“直线”就是大圆上的圆弧，它的几何就不是我们所熟悉的欧几里得几何而是一种“弯曲的”非欧几何了。

高斯对物理学的贡献不亚于天文学和大地测量学。1831 年，卓越的德国物理学家威廉·韦伯来到格丁根，他高超的实验技术引起高斯的巨大兴趣。和韦伯合作，高斯开始对磁学、电学和光学进行卓有成效的研究。他发明地磁仪，绘制全球的磁力分布图，并且对电磁和地磁的数学理论作了大量深刻的研究。正如麦克斯韦在《电学与磁学》一书中所指出：

“高斯的磁学研究改造了整个科学，改造了使用仪器、观察方法以及结果的计算。”

为纪念高斯在磁学上的贡献，人们特别用“高斯”来命名磁通量密度的单位。

在电报发明人的长长一串名单上也有卡尔·弗雷德里希·高斯的名字。远距离通讯的历史比较长，但是，在 1800 年左右所使用的

只是非电的方法。1832年，沙皇在彼得堡的冬宫和夏宫之间建立起电报联系。一年后，高斯和韦伯设计制造一种电报，把联系距离增加到2.3公里。这也许是第一台有实用意义的电报，比莫尔斯有专利权的发明早7年。50年后，格丁根在费利克斯·克莱因[①]主持下隆重举行高斯和威廉·韦伯纪念碑落成典礼，它再好不过地向人们强调了数学和物理学的有机统一。

高斯的基本研究还包括超几何级数和保角映射[②]，毛细现象和结晶学，透镜的折光研究，椭圆球体的引力计算和位置几何等等。和韦伯一起，高斯还花了多年时间试图找到一种适合于所有电磁现象的完备理论，可惜没有成功。假如他在30年后看到麦克斯韦的电磁场方程，大概会十分兴奋。

高斯生前共发表论著155篇，还留下大量论文没有发表。今天出版的高斯全集有整整12大卷。自从拉格朗日以来，数学家的研究日趋专门化，因此，高斯研究领域的广阔就显得异常出众，无论是深奥的数论的抽象理论还是应用科学的实际运用，无论是数学新领域的开拓还是天文学的冗长计算，他都表现出惊人的才能。他在纯粹数学和应用数学上的不朽工作是数学史上辉煌灿烂的一页。他填补古典数学家遗留的许多重大空白，为现代数学家开辟意义深远的全新道路。他的选题基本上是古典的，而他的方法是属于现代的，因此他既是最后一位卓越的古典数学家，又是第一位伟大的现代数学家。

安静的晚年

格丁根天文台的白色建筑，掩映在郁郁葱葱的绿树丛中，庄重

① 费利克斯·克莱因（1849-1925）是德国数学家，他认为几何学就是研究在给定变换群下不变的空间性质，他的这种观点对数学的发展有深刻影响。

② 保角映射指保持平面内两条曲线的交角不变的映射，在二维数学物理问题（如流体力学、弹性理论、电动力学）中很有用。

而雅致。每天，迎着落日的余辉，满头银发的高斯穿着宽大的灰色罩袍缓步走来。穿过花坛，沿着小河，前面是一片小树林。微风吹拂着树叶，伴着飞来飞去欢快的小鸟，奏出轻柔的乐曲。散步使老人宁静而愉快，忘却一天的疲劳。和牛顿晚年不同，高斯谢绝高官厚禄，也不喜欢官方应酬。在生命的最后27年，他只有一次离开天文台去柏林出席一个科学会议。要不是洪堡再三再四地盛情邀请，他本来连这次会议也不会参加。高斯仍和青年时代一样，朴实无华，孜孜不倦，对自己的俭朴生活和简单消遣安之若素。

在休息的时候，高斯非常喜爱欧洲的文学作品。不过，莎士比亚的悲剧容易使他敏感的心灵受到刺激，因此，他更喜欢阅读莎翁较为愉快的佳作。同时代的英国小说家华尔特·司各特的作品一出版，他是最热心的读者，只是遇到悲剧的结局会使他好几天心里难过。有一次司各特不小心触犯了天文学："皎洁的月亮从西北方升起。"这句话引得他哈哈大笑。他为此奔忙了几天，把所有找得到的书中的这句话改正过来。

高斯始终没有忘记他心爱的嗜好——语言学。为考验自己掌握语言的能力，他63岁的时候开始学俄文。没有任何人帮助，花了不到两年时间就精通了。他不仅能流畅地阅读俄国的文学作品，还可以用俄文同彼得堡科学界的同行们通信。1842年，喀山大学第一任天文台台长来格丁根拜访高斯，俄国客人对他一口流利的俄语赞不绝口。

他每天要花一个小时到博物馆翻阅报纸，从伦敦的泰晤士报到格丁根的当地报纸无一遗漏。他的政治观点有点保守，但是决不反动。他认为一个国家最可宝贵的是国内安定和不向外扩张。拿破仑式的征服在他看来完全是发疯。

回答世界各地的来信和会见登门求教的青年，是高斯晚年生活的重要部分。他喜欢倾听青年们谈话，同他们交朋友。在年轻人的身上，他看到未来，受到启发。他乐于回答他们请教的各种问题，但是从不凭借自己的威望来武断或轻率地下结论。他始终保持特有

的严肃和慎重。要是问题一时不能回答，他一定在事后写出详尽的书面解答。因此人们很了解，高斯一旦发表某种见解，必定有适当的证明作为后盾。

老人的体力渐渐不支，身体明显消瘦，心脏肥大，气喘，下肢浮肿。1854 年春天，他病了两个月，晚上气喘得无法躺下睡觉。大家担心这次没有希望了。可是，他奇迹般地战胜了死神。6 月，高斯支撑着病体参加他的学生贝恩哈德·黎曼的论文报告会。他发现这位青年对空间理论提出的见解比自己 27 年前在《曲面的一般研究》中的思想又大大前进了一步。看到格丁根后继有人，老人不胜欣慰。会后身体有所好转。报纸上每天都在刊登格丁根和卡塞尔[①]之间铁路即将通车的消息。他对铁路一向有浓厚兴趣，可惜至今还没有亲眼见过一条真正的铁路。这次是个难得的机会。6 月 16 日，他偕同全家乘坐两辆马车去参观。这是他 20 多年来难得的出门远行。一路上清风习习，万里无云。他兴致勃勃谈起对未来世界的设想。突然间，马受惊狂奔起来，把老人远远摔出车外！谢天谢地，奇迹又一次降临：高斯丝毫没有受伤，不过大受惊吓。恢复以后，他终于在 7 月 30 日高兴地参加铁路铺到格丁根的通车典礼，了却一桩一生的心愿。

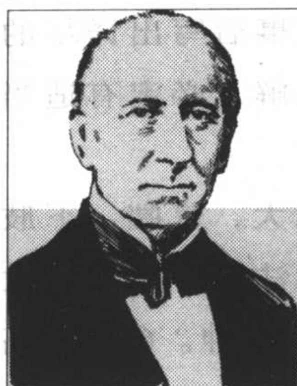
新年一开始，病痛加剧。知道自己的日子已经不多，高斯更加紧工作。可是，双手开始痉挛，一手漂亮的铅笔字变成断断续续的了。这位顽强的老人用痉挛的双手给勃路斯特爵士寄出他的最后一封信，介绍有关电报的设计。

直到最后一刻，高斯的神志始终清醒。经过同疾病长期搏斗，1855 年 2 月 23 日凌晨，当晨曦渐渐把黑暗和寒冷驱散的时候，这位为在黑暗中徘徊的现代数学带来光明的巨人安详地阖上了眼睛。

一颗巨星陨落了。全世界沉浸在哀痛之中。不，它并没有陨落。高斯的形象，就如光芒四射的恒星，永远照耀着我们前进的道路。

---

① 卡塞尔在格丁根西南方，两地相距约 50 公里，现在是重要的铁路枢纽和工业中心。



柯　西

(1789—1857)

柯西是当今真正懂得应该怎样对待数学的人。

——尼尔斯·阿贝尔

饥饿的童年

1789 年 7 月 14 日，巴黎的教堂钟声齐鸣。成千上万的群众，手持火枪、长矛，高举火把，浩浩荡荡地冲向封建专制的罪恶象征——巴士底狱。整个法国沸腾起来了！时隔不到 6 个星期，8 月 21 日下午，在法国大革命的隆隆炮声中，法国未来的大数学家奥古斯丁·路易·柯西在巴黎呱呱坠地。奥古斯丁的父亲路易·法朗科·柯西是法国议会的律师，有素养的古典语言学家和神学家。母亲玛丽亚·马黛丽。迪珊丝是个温柔动人、虔诚的天主教徒。

这些日子，巴黎街道上旗帜如林，到处是群众的集会。断头台前围观的人群，挤得水泄不通。王室和旧官吏遭到清洗和镇压。柯西先生因为曾经在波旁王朝的警察局里做过事，就和妻子一起，抱着新生的奥古斯丁，来到巴黎附近的阿克爱尔避难。刚开始，靠着过去的一点积蓄，日子还过得去。时间一久，生活渐渐困难起来，常常吃了上顿，就顾不了下顿。手无缚鸡之力的柯西先生，不得不拿起锄头，在空地上种些蔬菜、瓜果来充饥。可是，张着小嘴、嗷嗷待哺的小生命，不知趣地一个接一个地出世。柯西夫妇先后生育两个男孩，四个女儿。为了减少消耗，一家人只好半饿着肚子，提

早上床睡觉。尽管这样，孩子们常常在睡梦中惊醒，哭着向妈妈讨吃的东西。奥古斯丁看着啼哭的弟妹，就把母亲分给自己的一小份食物悄悄塞到他们的嘴里。因此，他常常一天只能吃到一二两食物，长得骨瘦如柴，个子也比同年龄的孩子矮小得多。直到20岁，他才发育到正常水平，而且在整个一生，他不得不十分注意自己的健康。

革命、战乱破坏了旧秩序，各地的学校都停办了。柯西先生只好亲自负起教育孩子的责任。在这方面他不愧为顶呱呱的大师。他自编教科书，其中不少还是用流畅的诗句写成的。他认为，用琅琅上口的诗来表达文法、历史、伦理等内容，儿童们接受起来要更加容易些。在父亲的精心指导下，奥古斯丁从小就能自如地写出法文和拉丁文的诗篇。后来，在闲暇的时候写诗，成了他一生的爱好。他甚至还出版过一本有关希伯来文作诗法的书呢。

动乱的时代和苦难的生活，促使柯西夫妇到宗教中去寻求解脱。因此，在孩子的启蒙教育中，宗教教育占了很大比重。无辜的奥古斯丁在双亲们炽热的宗教感情熏陶下，成了可怜的牺牲品，使他后来蒙受许多不应有的苦难。

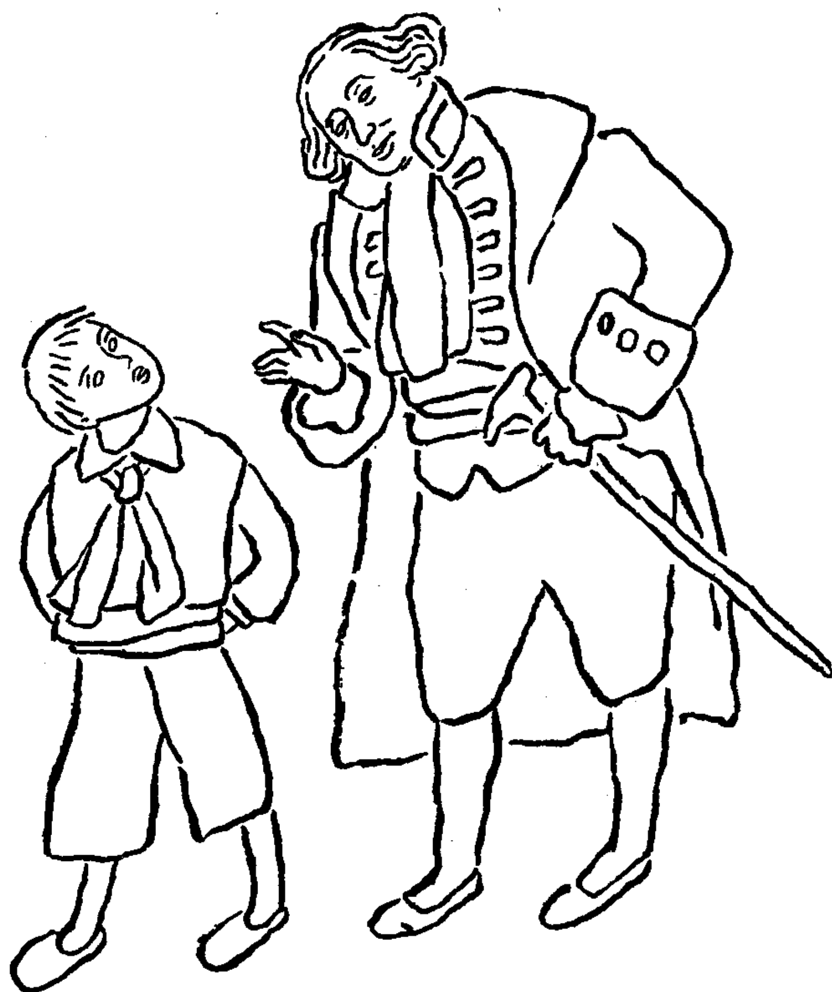
奥古斯丁在阿克爱尔度过他艰辛的童年。美味佳肴同他丝毫无缘不用说，就连填饱肚子是一种什么滋味，他也不知道。他终日饥肠辘辘。书籍成了他最好的食物。只有遨游在书本所展示的无比神奇的世界里，才使他获得最美好的享受，忘却了恼人的饥饿和人世间的一切烦恼。

大数学家和小柯西

在柯西家破败的小屋对面，矗立着两幢气派非凡的哥特式建筑。化学家克劳德·路易·贝托莱伯爵的华丽别墅和大数学家皮埃尔·西蒙·拉普拉斯侯爵的豪华庄园，遥遥相对，交相辉映。两座花园之间，只隔一道墙，中间有扇小门。拉普拉斯和贝托莱各有一把钥匙，可以自由出入。这些日子，出于和柯西先生同样的原因，他们

两人也在这里避难。

贝托莱后来做了拿破仑的朋友，和蒙日的关系尤为密切。尽管花园里姹紫嫣红，生趣盎然，这个性情孤僻的学者整天关在房间里，静悄悄地做着各种奇妙的实验。年纪只小一岁的拉普拉斯性格活跃得多。无论在彩霞满天的清晨或炊烟缭绕的黄昏，村民们常常可以见到他手里握着一根树枝，迈着矫健的步伐，一边观赏大自然的美景，一边构思着他的《天体力学》。有时候他还拐到柯西家来坐上一会儿，喝一杯清茶。体面的邻居屈尊光临，使柯西夫妇受宠若惊。他们尽其所有，拿出最新鲜的水果来招待贵宾。不过，吸引拉普拉斯到这里来的，不是主人的殷勤好客，而是他们家的大儿子奥古斯丁。他每次来访，总看见有一个少年老成的孩子独自一个人在角落里专心致志地看书。瘦骨嶙峋的身子，穿着一件打满补丁的黑色长袍，一头金黄色的长发，几乎披到肩上，活像是刻苦修行的苦行僧。起初，拉普拉斯只是感到好奇。很快，他惊讶地发现，这个体格上发育不全的小孩，智力上竟有非凡的天赋。他不但会写一手好诗，而且有惊人的记忆力和计算本领。拉普拉斯不知不觉成了柯西家的常客。他送来书籍和食物，有时还带着奥古斯丁一同去散步。一老一少，年纪相差整整 40 岁。拉普拉斯服饰考究，举止洒脱，处处流露出自信；走在旁边的奥古斯丁，衣服虽然破旧，但是十分整洁，一对充满稚气的大眼睛闪烁着智慧的光芒。迎着灿烂的早霞，披着落日的余辉，他们漫步在树林里，流连在小溪旁，有时并肩坐在绿草如茵的草地上。像知心的朋友一样，拉普拉斯对着浩瀚的太空，讲星球的演变和宇宙的奥秘，讲自己的抱负——用数学来描述太阳系星球的运动。他绘声绘色地描绘出一幅生动的图画：这些星球，按照数学的规律运动，像钟表一样准确！小柯西睁大眼睛，微张着嘴巴，完全入了迷。他望着这位和蔼可亲的长者，心中油然生起崇敬的心情，并且暗暗立下志愿，要像拉普拉斯那样，作一名揭开宇宙之谜的探索者。后来，柯西对纯粹数学作出许多巨大的贡献，但是他和拉普拉斯一样，首先是一位关心数学应用的数学物理学家。



大数学家和小柯西

拉普拉斯抚摸着孩子柔软的头发，心里充满着喜悦。对他来说，在僻静的阿克爱尔发现这个孩子，就像在漆黑的夜空中找到一颗明亮的新星。但是，他万万没有料到，后来这颗新星竟把他吓出一身冷汗！那是20年以后的事。一天，拉普拉斯无意中参加法国科学院一个论文报告会。在会上，青年数学家柯西对无穷级数学的敛散性问题第一次作出严格的论述。

什么叫无穷级数？什么是它的敛散性呢？

其实，在算术的循环小数中已经蕴含着无穷级数的初步思想。

例如

$$\frac{1}{3}=0.3333\cdots$$

这个循环小数就是无穷多项数累加的结果：

$$0.3333\cdots=0.3+0.03+0.003+0.0003+\cdots$$

无穷多项数（或函数）相加，称为无穷级数，它是数学分析不可缺少的一个组成部分。

有的级数，例如上述的级数，它有确定的和（这里是$\frac{1}{3}$），叫做收敛的；有的级数，例如

$$1+2+3+4+\cdots$$

它的后一项比前一项多1，这个级数的和没有确定的值，叫做发散的。对发散的级数，是不能作四则运算和微分、积分等分析运算的，甚至连代数里的结合律、交换律等也不适用。我们可以举一个简单的例子。考虑级数

$$1-1+1-1+1-\cdots$$

如果利用结合律，那么可以把级数写成

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

它的和显然等于0。可是，如果把级数写成

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots$$

它的和就是1。这样，根据“同等于第三个量的两个量相等”的公理，就应得出结论：1=0。这当然是荒谬的。可是，18世纪的数学家们（高斯除外）大都忽略了这一点，在计算中几乎不加区别地使用这些级数，形成数学分析研究中的一个重大缺口。阿贝尔后来埋怨这种情况：

“把不管什么样的任何证明建立在发散级数的基础之上，都是一种耻辱。利用发散级数，人们想要什么结论就可以得到什么结论，而这也是为什么发散级数已经产生这么多的谬论和悖论的原因。”

在报告会上，柯西第一次明确地指出这两种级数的本质区别，并且提出判别它们的准则。他的深刻论述成为数学分析严密化的一

项重要内容。听着柯西精细入微的分析，拉普拉斯的额头不由得沁出汗珠。因为在《天体力学》中，拉普拉斯使用了大量无穷级数，他担心，由于忽视敛散性这个极端重要的因素，自己几十年辛苦建造起来的天体力学大厦可能毁于一旦。不等报告会结束，他惴惴不安地悄悄退场，赶忙回家，关起房门，对书中的级数，按柯西的方法一一加以检验！

这少年将替代我们

在新世纪的元旦，3 匹红棕色的骏马向着阿克爱尔飞奔而来。大道上扬起一股冲天的尘埃。领头的是一个高大威武的信使，后面紧跟着两名护卫的士兵。村民们好奇地看着他们在大树下拴好马匹，径直向柯西家的小屋走去。上议院送来一份精致的任命书：路易·法朗科·柯西先生当选为上议院的秘书！奥古斯丁收拾好小书包，高高兴兴地跟着父母亲返回巴黎。父亲继续亲自指导他学习。他的小书桌就放置在父亲在卢森堡宫办公室的角落里。

柯西家的邻居拉普拉斯早在两年以前回到巴黎。在和拉格朗日的一次交谈中，拉普拉斯把他在阿克爱尔发现的“秘密”告诉了拉格朗日。拉格朗日听了只是不置可否地点点头，心里却并不十分相信。不过，他不愿意让拉普拉斯扫兴。他觉得，在一个人得意的时候，难免会有些夸张。事情十分凑巧。3 天以后，拉格朗日作为科学院院士和巴黎综合工科学校首席教授，到卢森堡宫讨论有关大学的改组事宜。自从拿破仑执政以来，大学的办学方针和人事都发生重大变动。这一天天气晴朗，拉格朗日的兴致特别好。会后，他来到柯西先生的办公室，决定对孩子来一次面试。本来他只是想证实一下自己的怀疑，不料，这一试使他大大吃了一惊。拉普拉斯的介绍不但没有夸张，甚至有点保守呢。拉格朗日简直不敢相信，一个 10 岁的毛孩子，居然能对自己连珠炮式的问题对答如流，而且看他的个子，最多不过是五六岁的小孩！他终于也和拉普拉斯一样，抑

止不住自己的激动，在一次数学家的集会上，向大家作了介绍，并且庄重地预言：

“这少年将替代我们！”

后来的事实证明，这个预言是多么正确。可惜，作出正确预言的拉格朗日，在这时候还没有预见到：后来，正是这个瘦弱的少年，和高斯一起，用他们革命性的创造成果，扫除了拉格朗日自己多年来对数学前途的重重疑虑。

1802 年，小柯西进入巴黎先贤祠中心学校学习。小柯西是插班生。他一进学校，马上成为全校瞩目的中心人物。第一年，他一举获得希腊语、拉丁文作文和拉丁文诗三项一等奖。1804 年毕业的时候，他又赢得只奖给成绩特别优异的学生的大奖和古典文学特别奖。老柯西在孩子身上浇注的心血结出了丰硕的成果。

拉格朗日曾经向老柯西建议，在 17 岁以前，不要让奥古斯丁接触高等数学，免得损害孩子的健康。所以，奥古斯丁在毕业以后，才在导师的指导下开始学习高等数学。拉格朗日的眼力果然不错。只用短短 10 个月的时间，小柯西就熟悉和掌握了数学中一切最困难问题的内容和技巧。

家里的生活有了很大改善。小柯西个子长高了许多，身体也结实起来，成为风度翩翩的青年。1805 年秋天，他以第二名的好成绩考入著名的巴黎综合工科学校。他超群的智慧和敏捷的反应，使得同班的其他同学黯然失色。可是，他的大学生活过得并不愉快。父母亲近乎狂热的宗教教育使他吃足苦头。他不顾时间、不论场合做起各种礼拜仪式，还不厌其烦地向同学们作老一套的说教，引起大家的极大反感。他们挖苦和嘲笑他过分的宗教热诚和偏激的态度，还利用柯西的好脾气，想出各种恶作剧来捉弄他。在巴黎综合工科学校呆了两年，柯西被迫转到土木工程学校去学习。在那里，他的成绩同样出类拔萃。虽然刚进学校，他轻易地超过已经在学校学过两年的高年级学生。

1810 年，柯西的学业胜利完成。这时候，拿破仑正处于权力的

巅峰。他统治了西欧和中欧。俄国的沙皇做了他的盟友。现在，拿破仑野心勃勃地要征服英国，拔掉他在欧洲的最后一颗钉子。进攻英伦三岛，要有一支庞大的舰队。港口和防止英国远洋舰队袭击的设防阵地的建设，就成为远征计划所必须解决的第一个项目。法国西北部的港口城市瑟堡无疑是执行这项计划的理想地点。从这里，越过英吉利海峡到英格兰登陆，不过100海里路程。拿破仑比法国过去的皇帝要开明些，他能够不拘出身和资历来选拔人才。这正是拿破仑军队比欧洲封建君主国的军队有较强战斗力的一个原因。由于柯西在学习中表现出杰出的才能和大胆的创见，当局把这个年纪刚刚20岁的最年轻大学生，从土木工程学校的历届毕业生中特别挑选出来，负责这项重要的工程。

在 瑟 堡

“行囊空空，但希望满怀。”1810年初春的一天，柯西辞别父母，冒着料峭的寒风，踏上春雪初融的泥泞道路，前往瑟堡赴任。在柯西小小的背包里，装着他最心爱的几本书：拉普拉斯的《天体力学》、拉格朗日的《解析函数论》和维吉尔的诗集。它们再好不过地说明这位青年军事工程师的爱好、理想和追求。

受父亲的影响，诗歌是柯西一生的业余爱好。他和欧拉一样，异常喜爱罗马大诗人维吉尔的富有田园气息兼寓爱国济世意义的诗篇。

拉格朗日曾经预言：“这少年将替代我们！”《解析函数论》显然是准备实现这个预言的最理想的著作。从这里，柯西不仅学到老一辈数学家为数学分析的严密化所作的种种尝试和有益的经验，还看出他们理论中的严重缺陷，激励他后来创造出一套严密的分析理论，澄清了100多年以来在分析领域里的混乱。柯西对分析严密化的卓越贡献，使他成为法国第一位现代数学家。

工地的生活紧张而且繁杂。柯西在给父母的信中谈到瑟堡的

工作：

"我4点钟起床，从早忙到晚。这个月，由于西班牙战俘的到达，我的日常工作增加了。我们只有8天准备时间，要盖收容所，准备1200张床位。……战俘最后总算都得到安置。有床，有稻草和食物，他们自己都觉得非常幸运。…… 工作不累；相反，我的精力更充沛了，我的身体非常好。"

柯西说自己的身体"非常好"，只是想安慰在远方的两位老人罢了。实际上，瑟堡繁重的工作重担压得身体单薄的柯西步履沉重，经常咳嗽发烧。从监督和指导炮兵阵地的设计和施工，筹划物资的运输，一直到协助瑟堡市市长指导学校的考试，忙得他没有一点喘息的时间。到了晚上，他还要在临时搭起的工棚里，手把手地教工人们识字和算术。他耐心和蔼的态度，充满感情的讲课，大大激发工人们的学习热情。在教学中，柯西取得许多宝贵的经验，为他后来成为欧洲最有名望的教授打下基础。

当柯西借着月光，拖着疲惫的身子，从夜校回到住所，喧嚣的工地已经沉睡。但是对柯西来说，工作现在才真正开始。他的房间是一间五六平方米的斗室，里面只有一块狭小的床板和一张书桌。椅子放不下，他只好坐在床沿工作。到冬天，他干脆把棉被裹在身上，来抵御肆无忌惮地从龇牙咧嘴的缝隙吹进来的寒风。千头万绪的事务被抛到九霄云外，疲劳和病痛也被忘得一干二净。他心中只有一个念头：要用最快的速度登上那一座座峻险雄伟、气象万千的数学高峰。柯西用一句话概括自己的工作：

"我……把数学各个分支，从阿基米德到天文学，从头到尾仔细重读一遍，排除障碍，应用自己的方法，简化各种证明，并且发现新的定理。"

柯西一步一步地沿着大师们的足迹，把所有的路径熟悉一遍，然后找出一条通向顶峰的捷径。他只是忘了提到，在白天足足忙碌了12个小时以后，瑟堡工地上这盏孤零零的油灯，常常和天上的晨星一样，一直到东方破晓的时候才隐灭！

1812 年，不可一世的拿破仑军队在莫斯科溃不成军。紧接着，法军在莱比锡又遭到惨败。拿破仑征服英国的计划成了黄粱一梦。瑟堡的工程随着陷于停顿。第二年，精疲力竭的柯西回到阔别三年的巴黎。

他的瑟堡之行，很快被人遗忘。但是他在瑟堡的出色研究，特别是他关于对称函数（从这里开始的这方面工作使他成为群论的开创者之一）和多面体的论文，在数学史上写下了令人难忘的一页。

牛刀小试

在中学课程的立体几何里，我们见到过 5 种正多面体：正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体。早在 2000 多年以前，希腊数学家毕达哥拉斯和他的学生就已经发现了它们。现在，数学家波沙提出一个问题：

“除了这 5 种以外，是不是还存在其他的正多面体？”

虽然欧几里得在《几何原本》中曾经对这个问题用几何方法作出过不大严格的证明，这个不大不小的难题，一时难住了所有的数学家。法国科学院决定设立奖金，征求解答。拉格朗日对于在卢森堡宫的那天“面试”记忆犹新。他立即写信把消息告诉正在瑟堡的柯西，建议他来完成这项有希望的研究。不负拉格朗日的期望，1811 年 2 月，柯西向科学院寄上他的处女作，干净利落地回答了波沙的问题：除了上述 5 种以外，不存在其他的正多面体。在论文的第二部分，柯西进一步推广立体几何中有名的欧拉定理，使它成为今天拓扑学中的一项重要内容。论文一发表，勒让德大为赞赏。他写信鼓励年轻人继续深入下去。作为答复，柯西在次年 1 月向科学院送上第二篇论文。这篇论文本身在今天虽然已经不值得作专门介绍，然而它所引起的争论对今天的数学有重大影响。论文由勒让德和马吕斯负责审稿。勒让德看了以后倍加称赞。他回忆起当年拉格朗日的预言，深深感到这位青年的前途不可限量。可是马吕斯有保

留。他不满意柯西在论证中采用间接证法。他认为这种证法不能证明任何东西。这是怎么回事呢？

原来，在古希腊哲学家亚里士多德发现的逻辑基本规律中，有一条叫“排中律”。它告诉我们：“一物或者具有某种性质，或者不具有某种性质，两者必居其一。”比如说，一数要么是素数，要么不是素数，不会有第三种可能。因此，在数学中，有时候直接证明一个命题比较困难，就可以先假定这个命题不成立，然后从这里推导出矛盾的结果。根据排中律，这个命题或者成立或者不成立，两者必居其一。现在，既然这个命题不成立有矛盾，所以这个命题成立。这种称为“反证法”的证明方法是今天每个学过平面几何的中学同学所熟悉的。可是这种方法在当时还没有被人们所普遍接受。马吕斯就反对这种方法。看起来这好像是从鸡蛋里挑骨头，故意找碴儿。实际上，埃蒂恩-路易·马吕斯并不是专业数学家。他是拿破仑进军德国和埃及时候的一位技术军官。他的出名是因为在一次偶然的机会中，发现了光的偏振现象。马吕斯本人也和他的批评一样，寿命不长。不到两个月，一场暴病，马吕斯一命呜呼。

争论似乎已经结束。可是，谁也没有想到，整整过了 100 年，荷兰数学家布劳威尔①在 1912 年成功地证明了：亚里士多德逻辑，例如排中律，在数学中的确不能不加限制地任意使用，特别在无限集合中更是这样。对神圣的亚里士多德逻辑的这个挑战，有人称它是现代的芝诺悖论，强烈地震动了数学界。它给数学基础的研究提出新的课题，有力地刺激着数学向着更深刻的方向发展。

滔滔大江

从瑟堡回来，劳累过度的柯西病了一场。拉格朗日、拉普拉斯、

① 卢曾·布劳威尔（1881-1966）是荷兰数学家，创立了数学中的近代直觉主义。他的研究推进了拓扑学发展。他在数学证明中拒绝使用排中律。

勒让德等都闻讯前来探望。在病榻旁，他们异口同声地劝他彻底摆脱工程师的繁重事务，致力于数学理论研究。年近古稀的老一辈数学家的热情关怀和殷切期望，像一股暖流流遍柯西的全身，给了他无穷的力量。他比过去任何时候都更清楚地意识到，使他魂萦梦绕的数学才是自己真正的事业。没有等病体完全康复，他就急不可耐地投入工作。如果说，柯西在瑟堡的创作只是高山上的溪流，那么现在已经汇成一条奔腾不息的大江。在数学和应用科学，在数学的各个分支，柯西的著作滚滚而来。特别是为创立和发展在19世纪占统治地位的复变函数理论，柯西取得了辉煌的成就。

数学家在18世纪处理的基本上是实数。复数，对于不少科学家来说，还是个不可思议的概念。但是，在引力理论、流体力学等领域里，提出了大量涉及复数的问题。作为一种有用的工具，欧拉、达朗贝尔和拉普拉斯等人曾经对复数作过一些研究。不过，他们的工作有一个本质的局限。在他们的心目中，复函数实际上不是基本的实体。为了作微分或积分的运算，就只好把复函数的实部和虚部分开来进行。真正取得进展的是高斯。是他，使人们较为愿意接受这个陌生的概念。可惜由于他的保守，他没有公开发表过多少重要的关于复函数理论的文章。只是由于柯西的卓越工作，复函数理论才从应用科学的有用工具上升为数学研究的一个新的领域。如果说18世纪是微积分的世纪，那么19世纪就是函数论的世纪。数学家莫里斯·克莱因说：

“从技术观点来看，19世纪最独特的创造是单复变函数的理论。……这个新的数学分支统治了19世纪，几乎像微积分的直接扩展统治了18世纪那样。函数论，这一最丰饶的数学分支，曾被称为这个世纪的数学享受。它也曾被赞誉为抽象科学中最和谐的理论之一。”

1814年，柯西在法国科学院大会上宣读他在复函数理论方面的第一篇论文:《关于定积分理论的报告》。接着，这方面一系列的论文接踵而来。特别是1825年的《关于积分限为虚数的定积分的报告》，被认为是柯西最重要的著作，有人称赞它是“科学史上最瑰

丽的一篇”。这些论著使柯西作为这一重要数学分支的独立创造者和最主要发展者，光荣地载入数学史册。

可惜的是，这些论文的实际出版时间常常要晚得多。特别是1825年那篇最为重要的论文，一直到柯西逝世以后17年才姗姗问世。出现这种令人遗憾的情况的一个重要原因是，柯西著述的数量过于庞大而且篇幅极长，景况拮据的法国科学院和综合工科学校难以负担这笔可观的印刷费用！

1815年，柯西在法国科学院宣读的另一篇论文，又一次轰动数学界。论文证明了费马提出的最困难的定理之一：

“每个整数是 k 个 k 角数之和。”这里 k 为大于3的正整数。

费马的定理指出，任何一个整数可以表示为3个三角数之和，也可以表示为4个四角数之和，5个五角数之和，…… 三角数，在第十章“宁少毋滥”一节中已经介绍过；四角数，是序列0、1、4、9、16、…中的数，也就是所谓平方数。费马的定理使数学家们深感为难。欧拉、拉格朗日和勒让德等大数学家曾经作过艰苦的探索，结果都失败了。拉普拉斯意识到问题的艰巨性，识趣地知难而退。高斯毕竟出类拔萃。他默默地证明了 $k=3$ 时的结果。在自己的科学日记里，他记载了这个事实，可惜没有公开发表。现在，这位26岁的法国青年，不动声色地证明了定理 $k\geq 3$ 时的一般情况，胜利地登上世界大师们从来没有达到过的高峰！

第二年，柯西在应用数学方面取得同样的成功。论文《波在深度无限的粘滞液体表面的传播理论》夺得那一年法国科学院的大奖。海洋的波浪正是论文提出的数学模型的实际对象。

柯西一连串金光四射的成就使世界其他的数学家黯然失色。在当时健在的数学家中，只有沉默寡言的高斯可以和他匹敌。有的院士私下向他保证，只要数学部一有空额，就一定推选他。崇高的科学院院士的座椅，近在咫尺了。

节日的盛会

果然，不出一年，27 岁的柯西当选为法国科学院院士。青年数学家的声望扶摇直上。1815 年以来，他一直在巴黎综合工科学校讲授数学分析，现在晋升为教授。不久又被任命为法兰西学院和巴黎大学（索邦学院）教授。对于欧洲的数学家，他已经比高斯更加出名，而且他的影响也超过这位轻易不发表意见的格丁根天文台台长。这不是夸大其词。不像保守的高斯，柯西的论文一篇接一篇，令人目不暇接；他条理清晰、深入浅出的讲课，也远比言简意赅的高斯受人欢迎。每逢柯西上课，教室里人山人海，简直成了节日的盛会。柏林、马德里和彼得堡等地大批著名的科学家，日夜兼程地纷纷赶来，生怕错过机会；白发苍苍的学者和大学生们一起，争着来聆听他在数学分析和数学物理方面提出的最新理论。巴黎的柯西和格丁根的高斯，这两颗欧洲上空光焰万丈的明星，驱散了上世纪末笼罩在数学研究上的悲观阴云，迎来光辉灿烂的黎明。

柯西的创造精力像股不可遏止的喷泉。除了日常的教学，他几乎每星期要给科学院送来两篇内容丰富的论文，另外再附上一篇他根据别人递交科学院的论文而写的详细的审查报告。这还不够。他还源源不断地送来涉及数学各个领域的篇幅稍短的论文。不到 30 岁，柯西已经当之无愧地成为法国最大的数学家。

1818 年，柯西和爱萝丝·德·巴蕾小姐举行婚礼，为青年数学家的锦绣前程增添一束芬芳的鲜花。巴蕾小姐端庄美丽，是有教养的古老世家的闺秀。和柯西一样，她也是一个热心的天主教徒。他们共同生活将近 40 年，生育了两个性格和柯西十分相像的女儿。

严格微分学的奠基者

柯西的课堂里人头攒动，座无虚席。然而，有幸亲身聆听他精

彩百出的演讲的毕竟是一小部分人。柯西每天收到从欧洲各地的来信，热切地希望他把讲课的内容公开发表。在拉普拉斯和勒让德等人敦促下，1821 年，柯西把他在巴黎综合工科学校讲授数学分析的讲义，取名《皇家综合工科学校分析教程》整理出版。两年后，《无穷小计算概要》和《微分学讲义》也先后问世。

微积分自从牛顿、莱布尼兹在 17 世纪 60 年代创立以来，经过无数数学家的不懈努力，它的应用范围得到极大的扩展，显示出无比巨大的威力。可是，经过一个半世纪的发展，微积分的理论基础仍然混乱不堪。什么叫极限，什么叫无穷小，什么叫连续，……这样一些微积分的基本概念，依旧众说纷纭，莫衷一是。阿贝尔不胜惊诧地谈到这种矛盾的现象：

“人们在分析中确实发现了惊人的含糊不清之处。这样一个完全没有计划和体系的分析，竟有那么多人能研究它，真是奇怪。最坏的是，从来没有严格地对待过分析。在高等分析中，只有很少几个定理是用逻辑上站得住脚的方式证明的。人们到处发现这种从特殊到一般的不可靠的推理方法，而非常奇怪的是，这种方法只导致了极少几个所谓的悖论。”

在漫长的岁月中，微积分的基本概念找不到精确的表达形式，有多方面的原因。一方面是，因为 18 世纪数学家们的主要精力大都放在微积分的应用上。微积分在数学和应用科学上的光辉胜利，使他们在相当程度上忽视了它的基础的极其不能使人满意的状况。更为重要的一方面是，当时的数学家们都希望把这些概念能够在几何直观中找到依据。因为当时算术和几何概念大部分都是建立在像线段长短和面积大小这样一些几何量的观念上的。微积分的创造者最初也是把微积分作为解决几何问题涉及的量之间关系的一个工具，例如利用它来求曲线某一点的切线或平面曲边图形的面积等等。因此，当需要说明极限的时候，最容易想到的就是把圆作为多边形的极限。这种说明立刻会引出应该怎样解释的问题。是不是多边形的边趋向于和表示圆的点重合？是不是多边形变成了圆？多边形和圆

的性质是不是一样？……这样一类问题使得人们迟迟不能接受极限的概念。因为在当时的科学界，机械唯物论的思想占据着统治地位。他们只承认数量的增减和位置的变动，而无法接受一个图形的性质全部形象地化为另一个图形的性质这样一种解释。

分析基础的脆弱状况，当然不能长期继续下去而不受到责难。唯心论的哲学家们更不会放过科学上的每一次“危机”来加强自己的地位。主观唯心论的重要代表贝克莱主教嘲笑无穷小是“离去了量的鬼魂”。他认为，牛顿把“一个无穷小的量0”最初假设为不同于零，后来又把它看做是零，是“分明的诡辩”。他趾高气扬地对着那些“不信神的数学家”喊叫:“谁要了解一个第二次或第三次流数，一个第二次或第三次差分，我想，就不需要对神有任何一点嫌弃了。”根据贝克莱的意见，人们当然只有跪倒在神的面前，乞助神的威力，来扫除分析基础上的疑难了。

为了回答贝克莱的挑战，数学家们作出了巨大的努力。他们提出种种解释，试图澄清分析在逻辑上的混乱。有关的小册子像雨后春笋一般纷纷出现。可惜，这些努力都不过是跳出一个泥坑又陷入另一个泥坑，并没有任何重要的进展。只是由于柯西革命性的工作，才第一次廓清笼罩在分析领域的疑云迷雾，驱走神的存在，把分析置于坚实的基础之上。柯西虽然是个笃信上帝的天主教徒，但是，18世纪以来科学上的一系列重大进展，使他意识到形而上学的严重束缚，不自觉地接受了朴素的辩证法思想。法国大革命粉碎了社会一成不变的神话；康德和拉普拉斯关于太阳系起源的星云说打破了宇宙永恒不变的形而上学的观点。这些进展使他有理由把无穷小定义为变量来消除微积分创立时所造成的含混不清。同时，从数学家们探索的无数次失败中，柯西敏锐地觉察到，企图利用几何直观或运动来建立微积分的基本概念，必然含混不清而且不可靠。因此，他一反传统的做法，创造性地把这些概念明确地定义为算术的而不是几何的，从而摒弃了分析基础上的一切混乱。数学家埃里克·贝尔说：

“很难找到一个恰当的比喻来描述这一进展的意义，或许可以这样来形容：人们世世代代崇拜着一些凭空捏造出来的神，突然之间，他们发现这些神的虚伪面目。”

向人们揭露分析中“神的虚伪面目”的，不是别人，正是奥古斯丁·路易·柯西。

在序言中，柯西有一段精彩的叙述：

“我曾经谋求给予分析的方法以几何中所要求的那种严密性，使推理不依赖于代数的一般性（代数的形式体系）。这样的推理，虽然一般是可以接受的，但是在从收敛级数向发散级数、从实数向虚数至关重要的过渡中，却不能采用。在我看来，这样的推理虽然有时也能提供真理，但是已经或多或少超出归纳推理的范围，和引以自豪的数学严密性大相径庭。我还注意到，存在一种使代数公式有效性不加限制的倾向。其实，大部分公式只是在一定条件下取一定的数值的时候才能成立。我将通过这些条件和数值的确定，以及赋予我所使用的符号以精确的含义，来排除一切不确定性。”

《皇家综合工科学校分析教程》、《无穷小计算概要》和《微分学讲义》三大名著是柯西对数学不可磨灭的最巨大贡献之一。它们长期以来被推崇为严密性的典范。经过将近两个世纪，柯西在讲课中所阐明的极限和连续的定义，无穷级数的收敛性等等，在今天任何一本精心写作的微积分著作中仍然可以完整地找到。微积分具有今天的特色，在很大程度上要归功于柯西。他是当之无愧的“近代意义下严格微分学的奠基者”。

分析方面的著作仅仅是柯西的琳琅满目的创作宝库中一颗珍奇的瑰宝。他的研究成果是这样丰硕，以致科学院和大学的理论刊物容纳不下。他需要单独为自己准备一种杂志。1826 年-1830 年，出版《数学练习》；1840 年-1847 年，改名《分析与数学物理练习》。柯西利用它们来刊登自己的创造性成果和其他解释性文章，对当时的数学界产生重大的影响。杂志在 30 年代暂时中断，因为柯西在这期间流亡在国外。1835 年，法国科学院的理论刊物《周刊》正式出

版。柯西立即从国外把他的学术论文连同评论、札记、注释等等，像潮水般涌向《周刊》。刊物的印刷费用直线上升，使科学院的财政面临严重困难。不过，对足智多谋的院士们来说，这算不上是个难题。不久，科学院通过一项迄今仍然有效的规定：《周刊》不得刊登4页以上的作品。它大大地限制了柯西酣畅淋漓的文字。柯西的大块头文章，包括一篇长达300页的有关数论的重要论文，只得到别处去另谋出路。

流亡国外

柯西以非凡的才华和无穷的精力，在数学上创造一个又一个奇迹。可是，只要一离开数学，他的理智和洞察力就完全丧失作用。就像是深度近视患者，一旦失去眼镜，他什么也看不清了。

1830年7月，法国刮起一场政治风暴。路易十六的堂侄路易-菲力普赶走了波旁王朝的末代皇帝查理十世。用里昂工人的话说：

“我们摆脱了世袭贵族的束缚，结果却陷于金融贵族的压迫之下。”

法国政治舞台上这幕小小的插曲，在柯西心目中竟成了事关原则的大事。他和当时的每个公职人员一样，作过效忠查理十世的宣誓。这本来是波旁王朝为了巩固统治所玩弄的一种把戏。可是对偏执的柯西来说，既然立下誓言，就不是口头说说而已。他要效忠查理十世“到底”。因此，当自己效忠的偶像流亡到英国再到布拉格受苦的时候，柯西不愿继续留在巴黎“苟且偷安”。没有任何暗示或者强迫，他决定离开科学院里的高位，放弃大学的教席和一切职位，抛下温暖的家庭，追随查理的榜样，到国外流亡。他这样做，不是为了讨取查理的欢心。查理本人对他的自我牺牲毫不知情。

他先来到瑞士。各种科学会议和研究工作使他忘记痛苦。不久，撒丁王国国王查理·阿尔贝特听到大名鼎鼎的柯西失了业，热情邀请他来都灵担任数学物理学教授。柯西欣喜地答应了。他很快就用

流利的意大利语开始讲课。柯西教授在都灵授课的消息不胫而走。转眼间，把一大批学者和大学生从欧洲各地吸引到都灵。开始的时候，柯西很有几分高兴，因为妻子不在身边，他可以随心所欲地通宵工作。可是，很快他就受到惩罚。一场大病几乎断送他的性命。这场病吓坏了他的意大利朋友们。柯西太太不在这里，要是有个三长两短，谁也担当不起。不管柯西愿意不愿意，他们连拉带拽地把他安排到意大利南部去度假。柯西有生以来难得有一次真正的休息。意大利南部的旖旎风光，令他心醉；和煦的海风，迅速恢复他的健康。不过，柯西无心继续在意大利南部游山逛水。他悄悄地返回都灵。那里的工作时时在牵动着他的心。谁知道他的行装刚刚打开，流亡在布拉格的查理十世打破了他雄心勃勃的计划。查理为了报答这位忠心耿耿的追随者，特别邀请柯西去布拉格负责对他的继承人、13 岁的波丹克斯公爵的教育。他根本没有意识到，这将给柯西、给整个数学事业带来多大的损失！

能够直接为自己效忠的偶像效劳，柯西高兴异常。他连夜收拾好行装，就恭恭敬敬地来到查理面前报到。第二年，他的家眷也从巴黎接来，和他团聚。但是，现实给柯西兴奋的头脑浇了一盆凉水。查理交给他的，实际上是女护士兼小学教师的工作。不仅普通学校的那些课程需要重新编写，以适合这个娇生惯养的小公爵的能力，而且要切实负起保姆的责任，得时刻提防他在花园里嬉戏的时候磕破膝盖。小孩子连跳带跑地乱窜，害得柯西满头大汗地在后面跟着四处奔跑。顽皮的小家伙把笨手笨脚的大数学家折腾得腰酸背疼，头晕眼花。从早到晚，只有孩子吃饭和睡觉的时候才有一点空闲。柯西想起巴黎的紧张研究和讲课时候的动人场面，心中不免怅然。可是，要背叛自己立下的“誓言”，他连想也不敢想。后悔来不及了。自己讨来的苦药，只有捏着鼻子把它吞下去。

恶劣的环境严重影响柯西的工作。他滔滔不绝的创作变得时断时续。但是他无比的创造热情并没有被完全扼杀。他眼睛紧盯着来回奔跑的小家伙，脑子里仍在紧张地思考着困扰科学界的各种重大

问题。一有机会，他立刻奔回自己的房间，写下一个公式或简略地写上一段。好容易熬到晚上，小公爵回到他母亲的身边，柯西才长长舒一口气。这时候，时间又属于他自己。他顾不得喘息片刻，便点起灯，铺开纸，奋笔疾书。不久，有关光的色散理论的精彩论文发表了。柯西把光假设为弹性波，在科学界引起巨大的兴趣。虽然，这种假设后来被进一步的实验所推翻，但是其中的不少公式，到今天仍然有实用价值。

拔河比赛

看到柯西在布拉格的狼狈处境，巴黎的老朋友们纷纷劝他回去。柯西吃够了自己讨来的苦头，也渴望着摆脱困境。可是他苦于找不到借口，难以启齿。好容易熬到 1838 年，机会终于来到。这一年刚好是父母亲结婚纪念的日子。告别查理一家，柯西回到阔别 8 年的巴黎。巴黎还是老样子。衣衫褴褛的乞丐沿街乞讨；门前停满错彩镂金的马车的歌剧院，灯火辉煌，夜夜满座。但是，柯西已经不是当年风华正茂的青年人了。漫长 8 年的日夜操劳染白了他的头发，压弯了他的腰背。

由于科学院院士特免履行效忠宣誓，柯西顺顺当当地回到他在科学院的位子。然而麻烦并没有过去。要担任其他公职，必须宣誓效忠路易·菲力普政府。法兰西学院有一席教职空缺，大家一致推选柯西来担任。可是，柯西拒绝宣誓。他认为，路易-菲力普——波旁家族的一个远亲——篡夺了查理十世的“神圣权利”，是“大逆不道”。他只好失业。天文局也需要像他这样的大数学家。柯西又一次被一致当选。政府意识到自己的规定不得人心，在行动上表现得犹豫不决，因此他没有宣誓就来到天文局工作。天文局的同事们也无视政府一再提出要他们另选一人来代替柯西的要求。对政府规定的公开蔑视使当局深为窘困，却又无可奈何。它知道，公开得罪法国最有名望的数学家，将会引起严重的后果。于是，以柯西和天

文局为一方，以不受尊重的政府为另一方，展开了一场“拔河比赛”。柯西就这样在天文局工作了4年。天文局的力气当然不会白花。柯西的卓越工作为她增添新的光辉。

1840年，法国天文学家勒威耶①写了一篇关于小行星智神星的论文。文章篇幅极长而且有大量复杂的计算。科学院收到以后十分为难。要审查这样的稿子，谁都感到头疼。约请了几位审稿人，都遭到婉言谢绝。柯西在和朋友的交谈中，无意中得知这个情况，就自告奋勇地承担起这项任务。科学界的人士对柯西的“热情”深表惊讶。考虑到审稿的困难，科学院允许他大大延长时间。可是，柯西又一次使人们大感意外。时间不但没有延长，反而大大提前了。原来，柯西不是顺着勒威耶的思路去一步步地检查。他设法另找一条捷径。从这里，他不但轻而易举地证明了勒威耶的结论，还发明一种新方法。利用这种方法，他把勒威耶的结果大大推广了。

1843年，和政府的拔河比赛出现危机。内政部长决心不让这个公众的笑柄继续下去 。他命令天文局把柯西解职，除非他宣誓效忠政府。柯西再度失业。1848年，路易-菲力普和他的一伙被赶下台。临时政府发布的第一批法令之一，就是废除效忠宣誓。它意识到，这类宣誓既不必要也没有用处。1852年，拿破仑三世即位。宣誓再度恢复。这一回，柯西没有遇到刁难。政府私下传话给他：作为例外，他可以不经宣誓，继续在大学任教。双方既然有默契，就没有发生风波。但是，人们只知道，从那时候起，直到他生命结束，柯西在巴黎大学（索邦学院）主持的数学天文学讲座，始终是学院的主要光荣和骄傲；他们并不了解，作为对政府屈尊姿态的回答，柯西把薪金合部捐献给他曾经居住过的西克斯地方的穷人。

为了弥补自己在国外流亡时造成的损失，柯西以前所未有的热情投入工作。在纯粹数学和应用数学，在力学、物理学和天文学，

---

① 勒威耶（1811-1877）是法国天文学家，和英国天文学家亚当斯（1819-1892）同时算出尚未发现的海王星的位置，还发现水星近日点的异常进动，并预言水星轨道内还有一颗最靠近太阳的未知行星。

他写下大量创造性的论文，为科学倾注最后一滴心血。

人死了，但事业永存

柯西一生的著述异常丰富。他的全集，包括 789 篇论著，多达 24 卷。历史上，在数量上超过他的，只有赫赫有名的欧拉。柯西逝世以后，甚至直到今天，总有人批评他的著作有点粗制滥造。他们常常忽略了一点，在这些并不是篇篇都是高质量的论文中，有大量的真正第一流的开创性工作。举世公认的事实是，即使经过了将近两个世纪，柯西的工作和现代数学的中心位置仍然相去不远。柯西作为现代数学家的崇高威望，在近几十年有增无已。他引进的方法，开创近代数学严密性的新纪元；他无可比拟的创造力，特别是他对复函数理论的卓越贡献，使 18 世纪末关于数学的悲观预言归于破灭。

柯西待人和善热情；如果是向信徒们募捐，他甚至有点低声下气。他生活有节制而且俭朴，但是他缺乏常识。有一次，英国著名物理学家威廉·汤姆孙即后来的开尔文爵士，当时是 21 岁的青年，来向柯西请教数学。大出所料，有关数学的话题没有谈上几句，他煞费苦心地劝威廉·汤姆孙皈依上帝。怪不得连世世代代都是天主教徒的阿贝尔，在给家里的信中也禁不住流露出自己的诧异：

“柯西竟是个这样偏执的天主教徒——对科学家来说，这真是不可思议。”

还有一件事使柯西不得人心。在科学院和学会里，他的投票完全是根据候选人的宗教和政治观点，而不是他们的学术成就。到了晚年，由于他的偏激、固执和不近情理，他和同事们的关系大大疏远了。

紧张的工作使柯西的支气管炎时时发作。遵照医生的意见，他退休到乡间居住。这是他童年居住过的地方。乡村的山水，依旧是那样清秀迷人。小溪、草地、树林，当年跟随拉普拉斯散步时候的

情景，历历如在眼前。不同的是，父亲亲手栽的几棵果树，如今已经绿树成荫。他悠闲地散步在风景如画的田间小道上，兴致勃勃地构思着田园小诗。他也没有忘记自己饥饿的童年：慷慨地把钱接济周围的穷人，并且衷心地希望，饥饿永远地从地球上绝迹。他的工作仍和过去一样勤奋。科学院的《周刊》总把重要位置留给他刊登新的论文。

1857 年 5 月 23 日，一场突如其来的高烧无情地夺走了这位 68 岁伟大数学家的生命。在逝世以前几小时，他正在和巴黎大主教商量慈善工作。这是他一生中的另一个爱好。他最后对主教留下的话是：

“人死了，但事业永存。”



罗巴切夫斯基

(1792—1856)

19世纪最有启发性、最重要的数学成就当推非欧几何的发现。

——大卫·希尔伯特

罗巴切夫斯基的理论，对于他同时代的人来说是不可理解的，因为它同基于几千年来被视为神圣的偏见之上的公理相违背。

——《罗巴切夫斯基文集》编者按

几何学的哥白尼

在历史上，称一个人是某个领域的哥白尼，是非同寻常的。这种称号如果不是表示最崇高的赞美，就一定是最严厉的谴责了。有人用最美好的语言来赞美哥白尼，因为他的日心说戳穿上帝创造的地球是居于宇宙中心的神话，动摇了几千年来神权对自然科学的统治。歌德认为，“哥白尼学说撼动人类意识之深，自古以来无一种创见、无一种发明可与伦比。”不过，用最恶毒的语言辱骂哥白尼的，在历史上也大有人在。他们骂他是疯子，是白痴，是死有余辜的叛逆，因为他居然向至高无上的上帝挑战，亵渎基督教的教义，威胁教会的统治。

考察一下俄国数学家罗巴切夫斯基创立的非欧几何和它对人类

思想的深刻影响，我们一定会赞同数学家克利福德①的一句名言：

“罗巴切夫斯基——几何学的哥白尼！”

到喀山②去

1792 年 12 月 1 日，尼古拉·伊凡诺维奇·罗巴切夫斯基诞生于俄国西北部的马卡里耶夫城。家里有兄弟 3 人，尼古拉排行第二。父亲是当地从事测量的小职员。尼古拉 7 岁的时候，父亲不幸病故。抚养 3 个孩子的重担就落在母亲帕拉斯可娃·伊凡诺夫娜的肩上。父亲在世的时候，微薄的薪水要养活 5 口之家已经相当勉强，现在就几乎陷于绝境。不过，帕拉斯可娃是个精明能干、意志坚强的俄罗斯妇女。纵然前面有难以想像的困难，她决心接受命运的挑战。白天，她在外面当帮工，干杂活，晚上再为人家缝洗衣服，含辛茹苦，攒下每一个挣来的戈比。一家人，今天吃的是黑面包加盐，明天吃的是盐加黑面包。艰辛生活的本身就是个好老师。孩子们虽然营养不良，身体羸弱，但是个个聪明伶俐，十分懂事。他们看着妈妈额头上的皱纹一天天增加，金色的秀发很快变成灰白，但是从来没有听到她一句埋怨，一声叹息。他们要像妈妈那样，做生活的强者，决不向命运屈服。在学校里，他们是数一数二的好学生；在家帮助妈妈干活，大家都争先恐后。虽然生活艰苦，一家人亲爱和睦，心里是温暖甜美的。对于一位母亲来说，还有什么比这更感到欣慰和引以为骄傲呢？

1801 年夏天，尼古拉以优异成绩从小学毕业。尼古拉的老师带着奖状和奖品来拜访帕拉斯可娃。他一向同情和尊重尼古拉的母亲。今天他打算同她谈谈对于尼古拉今后的建议。作为老教师，他教过的学生数也数不清。马卡里耶夫国民小学一成立他就在这里教书了。

---

① 克利福德（1845-1879）是英国数学家，在超复数、黎曼几何研究上都有所贡献。

② 喀山，现俄罗斯联邦鞑靼自治共和国首府，位于伏尔加河中游左岸。

可是像尼古拉这样的好学生，这样讨人喜欢和牵动他的心，还从来没有过。马卡里耶夫是个闭塞的小城，要什么没有什么。省城喀山的条件就不同。尼古拉三兄弟的学习都很好，完全可以考公费生。听说那里还要创办大学呢。不过老师的心里有点犹豫。他知道，要一个妇道人家带着3个小孩，到千里之外的陌生城市去生活，会遇到什么样的困难，而且到哪里去筹路费呢？但是想来想去，为了孩子的前途，他还是鼓起勇气说出自己的想法，并且热情地表示愿意承担一部分路费。老师的建议使帕拉斯可娃深受感动。她虽然识字不多，却很有头脑，她了解自己的孩子。今天听到老师的夸奖，更坚定她的信念。和天下的母亲一样，为了孩子的前程，帕拉斯可娃愿意作出一切牺牲。在她看来，到喀山去，并不是做不到的事。

新的生活在召唤。一个月以后，罗巴切夫斯基一家毅然踏上去喀山的旅程。乌拉尔的夏天是迷人的。婆娑起舞的白桦树林，潺潺的溪流，如镜的湖泊，衬托着远处苍莽的群山，景色如画。一家人餐风宿露，历尽艰辛。可是他们的心里充满着美丽的憧憬，倒忘却了旅途的疲劳。听着远处传来的伏尔加河上纤夫隐约的号子声，他们朝行夜宿；遇上好心肠的马车夫，就顺路搭一程便车。经过半个多月，喀山城遥遥在望，教堂的金色尖顶在阳光下闪闪发光。喀山城在向他们招手呢！

一身数任

尼古拉三兄弟果然不负母亲和老师的殷切期望，先后以优异成绩作为公费生考入大学预科学校（相当于现在的中学）。这时尼古拉才8岁。尼古拉门门功课成绩优秀，数学和古典文学的成绩尤为突出。1806年，14岁的尼古拉考入两年前刚成立的喀山大学。为了向欧洲的名牌大学看齐，学校特别聘请天文学家李特罗和数学家巴蒂尔等著名德国科学家来校执教。尼古拉出众的数学才华很快引起德国教授们的重视。他们邀请他来家里做客，还慷慨地允许他随意

借阅他们的私人藏书。尼古拉的数学老师巴蒂尔教授是高斯的小学老师和好朋友，来喀山大学任教以后，仍和高斯保持着通信。他了解高斯对非欧几何的见解，对尼古拉后来非欧几何思想的形成有一定影响。

1811年夏天，尼古拉大学毕业。按理说，学校应该授予他硕士学位。可是昏庸的校长不但不认为出了这样年轻的天才是学校的骄傲，反而觉得把学位授予一个不到19岁（还差3个月）的孩子是有失“体统”。校长的决定一宣布，教授们一片哗然。他们提出，如果不把硕士学位授予各科成绩优秀的尼古拉，那就谁也不配获得这个称号。在教授们的严词责问下，校长只得收回成命。

这期间，尼古拉的哥哥阿历克赛在喀山大学负责为当地的小公务员讲授数学。不久，阿历克赛因病离职，尼古拉就接替他的工作。1814年，喀山大学任命他为助理教授（相当于副教授和讲师之间的一种职称）。两年以后，罗巴切夫斯基晋升为数学教授。不过，这丝毫不意味着他有充裕的时间从事研究，恰恰相反，他的教学任务反而大大加重了。除了教授数学，他还得教授天文学和物理学，因为贪婪的校长一心想少聘几个教师，把多下来的钱装进自己的腰包。知识渊博、埋头苦干的罗巴切夫斯基就成为加重负担的最好对象。说实在的，罗巴切夫斯基的能力的确超乎寻常。再重的工作压下来，他都能圆满地完成。第二年，贪得无厌的校长看到罗巴切夫斯基还有潜力可挖，就干脆把图书馆和博物馆也交给他兼管起来！

图书馆因为长期无人管理，书籍堆积如山。博物馆同样混乱不堪。动植物标本缺肢断臂，东倒西歪；矿物标本积满灰尘。罗巴切夫斯基从教室里口干舌燥地讲课回来，来不及喝上一口水，就得脱掉上衣，卷起裤腿到图书馆和博物馆干活。掸灰尘，擦地板，修理门窗，给标本分类，忙得满头大汗。经过罗巴切夫斯基的辛勤劳动，破破烂烂的图书馆和博物馆很快被收拾得井井有条，面貌焕然一新。谁知这个成果只是使校长又得到一次捞钱的好机会：任命罗巴切夫斯基兼任喀山大学理学院院长。不用说，财迷心窍的校长不肯破费

分文为罗巴切夫斯基配备一名助手。

恼人的平行公理

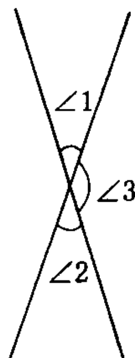
精疲力竭的罗巴切夫斯基回到家里，身子往椅子上一靠，一动也不想动了。他的眼皮不觉渐渐发沉，很快发出轻轻的鼾声。妻子望着丈夫清瘦的脸庞，把毯子盖到他的身上，爱怜地摇摇头。6月的喀山是一年中最好的时光。草色青青，百花吐艳。看着人家的小俩口，推着小车，带着心爱的小宝宝，有说有笑地在花园里散步，真叫人羡慕。结婚3年来，罗巴切夫斯基夫妇还没有享受过这样的欢乐。可是，看到丈夫累成这副模样，妻子本来到了嘴边的埋怨，也就变成无声的叹息。

晚饭以后，罗巴切夫斯基又精神抖擞地开始工作。他时而在纸上写着画着，时而陷入沉思，激动的时候，他就推开椅子在房间里踱来踱去。喧闹的喀山城在夜色的抚慰下安静下来，可是，罗巴切夫斯基的脑海里却像翻滚的波涛难以平静。他不是在为喀山大学拮据的经费发愁，也不是在为天文系的筹建操心。使他激动不已的是一条每个中学同学都熟悉的几何学上的公理——欧几里得平行公理。

欧几里得公理是几千年来人们公认的真理，清楚明白，一目了然，那里面有什么东西值得罗巴切夫斯基这样激动呢？要说清这个问题，需要简单地回顾一下历史。早在公元前300年左右，位于尼罗河三角洲北端，濒临地中海的亚历山大城里的欧几里得，总结前人和同时代学者对几何的知识，写了一部著名的《几何原本》，一共13篇。这就是欧几里得几何或者叫欧氏几何。欧几里得由定义、公理出发，根据严格的逻辑，推导出初等几何的全部定理和命题。它是这样的严密和完美，以致2000多年以来，数学家和哲学家用尽美好的词语来赞美它，把它奉为至高无上的惟一的几何真理，而它的逻辑结构大概比世界上任何其他著作更大地影响科学思想的发展。如果不计数量众多的手抄本，自从印刷术发明以来，《原本》至少

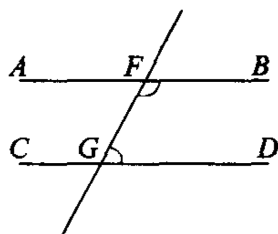
已经有1000多种版本。今天中学几何学的内容，基本上就选自《原本》13篇中的6篇，而且有的地方一字未改。

学过平面几何的读者一定记得，在几何学里，为了保证论证的严密性，在每一步推理后面必须注明理由。比如说，为了说明两个角相等，就得指出，是因为它们是对顶角还是因为它们是平行线的内错角等等。像对顶角或内错角相等这一类论据，在几何学里叫做定理。那么定理是怎么来的呢？它们是由定义和公理根据逻辑推理得到的。举例来说，为什么对顶角∠1和∠2相等？从附图中可以看出，那是因为∠1+∠3等于一平角，∠2+∠3也是一平角；从两个平角里各减去∠3，它们的余量∠1和∠2应该相等。为什么余量应该相等？这里是根据一条公理："等量减等量，余量相等。"说到这里，可能有人还要问下去：那么公理又是根据什么得到的呢？这就有点为难。在当时占统治地位的康德哲学认为，欧几里得几何的公理是必然的、先天的观念，它出自纯粹的理性，是先验性的，和经验无关。因此，有的人就干脆把公理看做是上帝的宇宙设计的一部分。不过，一般认为，公理，公理，顾名思义是公认的真理，要说它有什么根据，那就是它和人类无数次的实践经验相一致。像欧几里得几何的第一公理："两点间可以作一条直线。"人们认为它符合于我们的实践经验，直观可靠，不证自明。欧几里得几何就是建立在为数不多的这样几条公理基础之上的一个严密的体系。可惜的是，在欧几里得精心制作的这件精美绝伦的"天衣"上，人们发现一条小缝隙：欧几里得的平行公理并不像其他的公理那样直观和不证自明。这条公理是这样的：



"若一直线与两直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线无限延长后，必相交于该侧的一点。"

仔细一想，平行公理至少包含两处困难：一处是公理中所说的



"无限延长"。它不但不直观。甚至超出人们的想像力以外。人们可以想像把一条直线延长到很远的地方，但是无限延长一条直线将是什么样的景象，就难以想像了。另一个困难是它的结论："必相交于该侧的一点。"这不能说不证自明。因为有时候两条线虽然不断地接近，可是始终不相交，像双曲线和它的渐近线就是这样。所以，虽然没有人怀疑平行公理的正确性，但是，它缺乏其他公理所具有的那种无可争辩的说服力。甚至欧几里得本人显然也不喜欢它。他只是在证完了不需要用平行公理的所有定理以后才使用这条公理。由于它包含着这么多的困难，因此，有人甚至主张把它从欧几里得的公理系统中剔除出去。

既然在美丽的"天衣"上出现缝隙，人们当然要千方百计地把它整修好。首先有人想到，平行公理是不是一条可以由其他公理推导出来的定理？如果真是这样，那就可以把这条公理删掉。许多数学家为此提出各种各样的证明。粗看起来，其中有不少证明构思巧妙，理由相当充足。可是仔细一推敲，每个"证明"不是暗含地假设了一些不应该假设的东西，就是假设了一个同平行公理相类似的公理。这些"证明"的一次又一次失败，使一批有真知灼见的数学家意识到，要用欧几里得的其他公理来证明平行公理，是徒劳的。

既然此路不通，有人就开始考虑：能不能用一条直观上更容易接受的公理来代替这条恼人的平行公理呢？结果同样令人失望。提出来替代的各种公理并不比平行公理稍微好些。

2000 多年以来，为了证明欧几里得平行公理是一条定理，或者寻求一条更容易接受的公理来代替平行公理，不知耗费了多少有才华的数学家的精力。从事这项工作的人是这样众多，而结果是这样使人失望，以致有人把平行公理问题看做是"几何原理中的家丑"。

但是，科学上任何一项重大成就从来不是一蹴而就的。失败决

不等于徒劳。既然欧几里得几何离不开存在这么多困难的平行公理，就不能不使人们对统治了2000多年的神圣不可侵犯的欧几里得几何产生疑问：它究竟是不是反映物质空间的惟一的几何真理？

事情实在太重大了。如果怀疑能够成立，就无疑是人类认识上的一次革命。既然允许有这样多困难的平行公理存在，为什么不可以有同样多困难的其他的平行公理呢？公理，原来并不像康德所宣扬的那样是先于人的经验而存在的，它也不具有人们所想像的那种绝对性。罗巴切夫斯基倏地推开椅子站了起来。他清醒地意识到，自己正处在一个历史性的门槛上。跨过门槛，将是一个几何学崭新的时代！

天上的繁星渐渐隐去。深沉的夜幕上透出一层青色。微风吹拂着罗巴切夫斯基的头发，使他感到一丝凉意。妻子和偎依在她怀里的刚满周岁的儿子甜蜜地熟睡着。罗巴切夫斯基充满柔情拿起从妻子肩上滑下来的被角，轻轻盖好。远处传来鸡鸣声。东方即将破晓了。

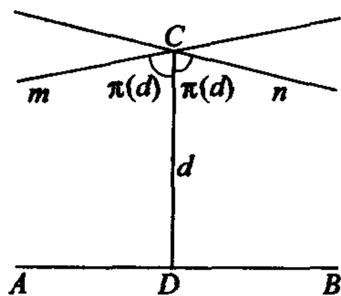
石沉大海

1826年冬天。北风卷起残雪追逐着行人匆忙的脚步。淡淡的阳光铺撒在积雪上反射出刺眼的光亮。在喀山大学数理系大楼门前的布告栏里，贴着一张小布告：

“兹定于2月11日晚上6时半，在大教室举行报告会，由尼·伊·罗巴切夫斯基教授主讲《论几何的基础》，欢迎师生们踊跃参加。”

这类报告会，数理系每月要举行一二次。因为是罗巴切夫斯基来演讲，今天到会的听众比平时多。整个教室几乎座无虚席。平日镇定自若的罗巴切夫斯基，拿着讲稿走上讲台的时候，显得有点激动。他知道要讲清楚自己多年来对欧几里得平行公理的研究心得，是一项困难的任务。因为他的结论在一般人的心目中是不可思议和

无法接受的。说实在的，他并不期望自己的演讲会得到热烈的响应，不过他当然渴望着能赢得一两个知音。他要向听众证明，欧几里得平行公理是独立的，不可能由欧几里得的其他公理给予证明。因此，建立在别的公理选择基础上的其他的几何学在逻辑上是可能的。和欧几里得平行公理不同，罗巴切夫斯基大胆提出下面的假设，也就是罗巴切夫斯基平行公理：过直线 AB 外一点 C，在平面上可以作不止一条直线和 AB 平行！他把通过 C 点的所有直线分为两类：一类直线和直线 AB 相交；另一类和 AB 不相交。附图中的直线，m 和 n 是属于后一类，它们构成上述两类直线间的边界，称为平行直线。如果 C 点到 AB 的距离等于 d，那么存在一个和 d 有关的角 $\pi(d)$——记号 $\pi(d)$ 是标准的，$\pi(d)$ 中的 π 和圆周率 π 无关——使得所有过 C 点的直线和 CD 所成的角小于 $\pi(d)$ 的将和 AB 相交，而其他过 C 点的直线和 AB 不相交。这些不和 AB 相交的直线都是欧几里得意义下的平行线。因此，在罗巴切夫斯基的几何里，过 C 点的 AB 的平行线不止一条而有无穷多条。同时，角 $\pi(d)$ 随着 d 的增加而减小。当 d 趋于无穷大的时候，$\pi(d)$ 趋于零；当 d 趋于零的时候，$\pi(d)$ 趋于直角。如果 $\pi(d)$ 等于直角，那就是欧几里得的平行公理。在不用平行公理的部分，罗巴切夫斯基几何和欧几里得几何是一样的；在应用平行公理的地方，这两种几何就不同了。比如说，在罗巴切夫斯基几何里，三角形内角之和小于两直角，而且随着面积的增大而减小。当面积趋于零的时候，三角形内角之和趋于两直角。可见，在小范围的情况下，罗巴切夫斯基几何和欧几里得几何相当近似。



任何一种理论只是在一定条件下反映客观世界的相对真理。如果把它当作在任何条件下绝对正确的终极真理，科学就无法前进了。

欧几里得几何是反映物质世界的相对真理，因为它符合地面上较小范围的实验。欧几里得心目中的平面和直线的概念是从“光滑的”地面和地面上两点间的最短连线——测地线中产生的。可是对于在浩瀚的大海上航行的船只来说，海平面并不是欧几里得平面，而非常接近于球面。在这样的“平面”上，两条“直线”的交点有两个而不是一个；读者可以想想地球上两条经线交于两极点。它的三角形内角之和大于两直角而不是等于两直角。可见欧几里得空间并不是反映物质空间的必然的和惟一的形式。如果把实验扩大到星空世界，那里的光线并不是欧几里得意义下“笔直的”直线，空间也不是欧几里得的平直的空间。在这种场合下，欧几里得几何当然也不适用。

几何和其他的理论一样，都来源于实践。但是，理论一旦从实践抽象出来以后，按照自身的发展规律，有可能走在实践的前面。虽然罗巴切夫斯基在当时还不了解自己的几何到底反映哪种空间形式，但是，有一点他十分清楚：他的几何和欧几里得几何具有同样的合理性。它们的区别只在于它们采用不同的平行公理。

非欧几何的建立在数学发展史上具有划时代的意义。罗巴切夫斯基用一条在直观上完全不能接受的罗巴切夫斯基平行公理来代替直观上能够接受的欧几里得平行公理，标志着人类对空间形式的认识发生了飞跃：由直观的空间上升到抽象的空间，从而从根本上动摇了认为几何公理能够凭它直观的自明性而成立的传统观念。它迫使人们重新考虑对数学性质的理解，以及数学和物质世界关系的理解。各种非欧几何纷纷出现。随着科学的发展，非欧几何日益显示出无比强大的生命力，其中最为重要的是黎曼几何，它为后来的广义相对论的建立提供坚实的数学基础。

呼号的寒风刮得窗户格格作响。罗巴切夫斯基愈说愈激动，苍白的脸色泛出淡淡的红晕。他没有发觉，听众已经走掉一大半。当康德的教条牢牢地束缚着人们的头脑的时候，罗巴切夫斯基的理论无异是“一派胡言乱语”。坐在第一排的一位胖老先生耷拉着脑袋

在打盹；一个年轻的学生，瞪大着眼睛，露出迷惘的神情，……罗巴切夫斯基的历史性演讲湮没在呜咽的北风之中。论文没有发表；原稿也下落不明。但是，1826 年 2 月 11 日，这个令人怀念的日子，作为非欧几何的诞生日已经不可磨灭地载入数学的光辉史册。

多灾多难

1825 年，喀山大学校长侵吞公款的事实遭人揭发，被迫下台。新校长任命专职的图书馆和博物馆馆长来减轻罗巴切夫斯基的负担。两年以后，大学委员会推选受到全校师生拥戴的罗巴切夫斯基出任校长。喀山大学从此进入蓬勃发展的新时期。

在大学校长的崇高岗位上，罗巴切夫斯基的领导才能得到充分的施展。他聘请有真才实学的专家教授来校执教，并且不顾官方的压力，提倡自由讲学；图书馆的藏书大量增加；代表整个俄罗斯矿藏的矿物标本不断得到补充；为了制造教学中需要的仪器设备，专门建立了机械加工车间；……罗巴切夫斯基既是统筹全局的一校之尊，又是勤勤恳恳的普通一兵。他主持重要的学术活动，也不错过到现场劳动的机会。在一生中，他奉行这样的信条：要把工作做好，最好是亲自动手，至少要能对别人的工作提出中肯的意见。在罗巴切夫斯基领导下，喀山大学蒸蒸日上，它的名字越出俄罗斯的国界，名扬欧洲了。

一天下午，一位外国的教育大臣慕名来喀山大学参观。正在干活的罗巴切夫斯基搓搓带油污的双手上前接待。因为罗巴切夫斯基没有作自我介绍，客人误以为他是大学的一名普通工作人员。罗巴切夫斯基陪他参观学校的各个角落，如数家珍般向客人介绍藏书的规模，标本的来历，仪器的构造，……他广博的知识、热情的态度和对情况的深入了解，给客人留下难忘的印象。参观完毕，大臣掏出厚厚一叠钞票，来表达他对接待人员的满意心情。罗巴切夫斯基见到送到面前的钞票不由发怒。他不客气地把手一甩，扭头就走。

用钱来报答罗巴切夫斯基的接待当然是不可容忍的侮辱。大臣尴尬地站在校门口不知所措。晚上，这位大臣在省长的招待会上又意外地和罗巴切夫斯基相遇，才知道下午发生了有趣的误会，两人相视大笑。

喀山大学前进的道路上布满荆棘。政治的腐败，官吏的无能，给喀山大学造成极大的困难，而各种意外的灾祸也像影子一样，同它形影不离。

1830 年夏天，一场大瘟疫席卷俄国。喀山的居民成批地死亡。绝望的患者被收容到教堂里接受简单的治疗。教士们所能做的只是为垂危的病人作忏悔祈祷或埋葬死者。当时，细菌的理论还没有建立，落后的卫生习惯使霍乱菌横行无阻，大施淫威。面对死神的严重威胁，罗巴切夫斯基不愿束手待毙。他把 600 多名师生员工和他们的家属组织起来，向瘟疫开战。他所采取的措施远远走在时代的前面：把男女老少集中在一幢楼里，门窗紧闭，除了运送食物，禁止一切出入。在楼内实行严格的卫生措施。在瘟疫流行期间，整个大学只有 16 人丧生，同喀山城十室九空的悲惨景象形成鲜明的对照。

喀山大学校园里一幢幢大楼拔地而起。为了使这些建筑既经济实惠又美观大方，罗巴切夫斯基亲自钻研建筑学，并且成为专家。在他切实有效的领导下，楼房造得又好又省。实际开支远低于原来的估价。在政府的建筑工程中这是绝无仅有的现象。不幸，1842 年一场大火烧掉半个喀山城，也焚毁了罗巴切夫斯基多年的心血，其中包括他心中的骄傲——一座刚刚竣工的乳白色的天文台！

但是，一个又一个的灾难没有把罗巴切夫斯基压垮。他满怀信心地领导全校师生员工投入紧张的重建工作。

疾风知劲草

喀山大学的繁重事务没有中断罗巴切夫斯基对非欧几何的研究；

在数理系演讲的失败没有使他气馁。罗巴切夫斯基了解自己工作的意义。他决心继续研究，使自己的理论更臻完善。1829 年，《喀山大学通报》上发表他第一篇非欧几何的论文《论几何的基础》，接着一系列的有关论文在《喀山大学通讯》和《数学杂志》上陆续发表。可惜这些论文仍旧不被人注意，当然更谈不上重视了。1840 年，罗巴切夫斯基用德文写的《平行线理论的几何研究》正式出版。在书中他慨叹人们对他的理论兴趣不大，不过他始终相信，这个理论总有一天会得到承认。事情果然有了转机。这本书落到了数学王子高斯的手中。他高度赞赏罗巴切夫斯基的工作，并且向他的一位朋友舒马赫尔作了热情的推荐：

“不久前我有机会重读罗巴切夫斯基的论文。这篇文章包含一些几何的要素。要是欧几里得几何真是不合实情的话，这些要素就应该存在并且发展成为一种严密的系统。……作为一位真正的几何学家，罗巴切夫斯基全面而精确地把整个几何重新加以组织。……我建议您把注意力集中在这样的著作上，读它会使您大受教益。”

谁都知道，受到高斯这样的赞誉是多么的难能可贵。就在喀山大火那年，由高斯推荐，格丁根皇家学会选举罗巴切夫斯基为外籍通讯会员。这个消息，对于处境孤立的罗巴切夫斯基无疑是莫大的安慰。可惜的是，虽然高斯本人早在 54 年前已经看到非欧几何的轮廓，他对非欧几何的见解却只能在他个人的注记和私人通信中找到，从来没有公开发表。用高斯自己的话说，他担心公开发表会招来“维奥蒂亚人的叫嚷”。这里他借喻希腊的一个具有独特的军事、政治的部落来影射反对非欧几何的人。的确，在康德的教条占据着统治地位的当时，要公开宣布或支持有关非欧几何的革命性思想，是需要勇气的。因此，一直到高斯逝世以后，他生前的信札和注记陆续被披露出来，人们才开始重视非欧几何这个课题，它的伟大意义才逐渐为数学家所认识。可惜，非欧几何的创始人——罗巴切夫斯基没有能亲眼看到这一天的到来，他本人已经紧随高斯之后，长眠于九泉之下。

非欧几何诞生的历史告诉我们，科学家不但要敢于对公认的“真理”提出怀疑，向传统观念挑战，也要有勇气公开宣布自己的见解，哪怕它会招来嘲笑、迫害以至杀身之祸。但是，这还不够。作为一名追求真理的战士，不应该掺杂任何自私的目的。他关心的是追求真理和造福于人类。一切有关发明优先权的争论同他格格不入。从这个意义上说，罗巴切夫斯基作为非欧几何的创始人是当之无愧的。高斯虽然早在罗巴切夫斯基以前看到非欧几何的真理，但是他屈服于康德哲学和传统的压力，不能公开地对欧几里得几何提出挑战，甚至不能对罗巴切夫斯基的理论给予公开的支持。匈牙利的亚诺什·鲍耶几乎和罗巴切夫斯基同时地在非欧几何研究中取得类似的结果。可惜他过于计较优先权的归属，以致半途而废。亚诺什·鲍耶的父亲法尔卡什·鲍耶是高斯在格丁根大学的同学和好朋友。1832 年 1 月，法尔卡什把儿子的一篇有关非欧几何的论文送寄高斯审阅，论文的题目是《绝对空间的科学》。两个月以后，高斯寄来回信，充分肯定亚诺什的成果，并且热烈赞扬他的创造精神。不过，高斯不无遗憾地接着说，他不能过分称赞这篇论文，因为文章中的观点正是他自己多年来所持的见解。亚诺什看到高斯把他提高到大数学家的地位，却剥夺他发明的优先权，顿时感到心灰意懒。等到他看到罗巴切夫斯基在 1840 年出版的《平行线理论的几何研究》就发怒了。他发誓以后永远不发表任何数学论文。亚诺什以为罗巴切夫斯基对他的《绝对空间的科学》作了厚颜无耻的剽窃。虽然后来他了解到罗巴切夫斯基的工作，误会得到消除，可是他仍固执地不愿改变自己意气用事的誓言，再也没有对数学作出贡献。

悲苦的纤夫

在罗巴切夫斯基领导下，一所崭新的喀山大学在大火的废墟上拔地而起。罗巴切夫斯基本人作为真正的几何学家得到了欧洲的承认。

1846 年，罗巴切夫斯基在喀山大学执教已经超过30 年。按照大学委员会的条例，他应该离开教授的工作岗位。罗巴切夫斯基向教育部提出免去他主持数学教研室的教授职务，由他的学生波波夫来接任。不料教育部借此为由，不仅免去罗巴切夫斯基教授职务，还免去他包括校长在内的在喀山大学的一切职务，让他去担任喀山督学帮办。这对于几乎把自己毕生心血倾注给喀山大学的罗巴切夫斯基，不啻是晴天霹雳。教育部的决定遭到喀山大学师生的强烈抗议，然而沙皇当局对群众的呼声置若罔闻，拒不解释理由。

其实，罗巴切夫斯基被解职的真正原因并不难找到。当他还是喀山大学学生的时候，由于他成绩优异受到教授们的赏识而被选为班长，可是校方却因为他过于活跃，违反校规，而很快把他免职。沙皇亚历山大一世（1777-1825）取得对拿破仑战争胜利以后，对内更进一步强化反动统治。教育部和宗教事务部合并。罗巴切夫斯基虽然由于工作出色不断得到晋升，但是主管当局一直对他放心不下，认为他“在很大程度上表现出无神论的特征”，是一个潜在的危险人物。1819 年，他们派人来检查工作，赶走了一批教授，要其余的教授们根据“宗教的启示”讲课，并且命令学生按修道院方式生活。罗巴切夫斯基不理会特派员的要求，只是避免同他公开对抗。后来罗巴切夫斯基出任校长。他对于教师在讲学中反对专制统治、反对宗教迷信的观点，任其传播，不加制止；对于学生中反政府的秘密活动，不但不加打击，甚至暗中予以保护。特别是罗巴切夫斯基长期以来不遗余力地鼓吹非欧几何的思想，公开怀疑欧几里得平行公理，直接动摇了旧世界的基础。一批嫉贤妒能之辈早就巴不得把罗巴切夫斯基撵走。他们终于等到了这一天。

对于这样的打击，不能说罗巴切夫斯基毫无思想准备。他完全清楚，发现真理要作出艰巨的努力，说出真理同样要付出代价。为了“日心说”的诞生，哥白尼一直到病势垂危的时刻才敢公开自己的见解；70 高龄的伽利略被迫向宗教法庭下跪以免一死；布鲁诺更在鲜花广场上献出了自己的生命。因此，从罗巴切夫斯基宣布非欧

几何思想的那天起，就准备着承受任何可能的打击。但是，当打击真的成为现实的时候，他还是感到若有所失。喀山大学是他的家，也是他的命。要他离开大学，就像要把树木连根从地上拔起。一夜之间，生气勃勃的罗巴切夫斯基苍老了。第二年，由政府精心挑选的新校长一上任，就严厉镇压一切对政府的不满行为，禁止学生的社团活动。罗巴切夫斯基失去重返大学的最后希望。他只能偶尔在大学考试的时候协助监考。但是，他的视力迅速衰退，连这个闲差也渐渐无力胜任。罗巴切夫斯基还没有从这次打击中恢复过来，又



伏尔加河畔的纤夫

遭到一场意想不到的灾祸：他心爱的儿子因病突然死亡！罗巴切夫斯基的身体跟着垮了。他热受生活，热爱研究，热爱喀山大学。可是，腐败的政府把他排挤出学校；无情的病魔夺走他爱子的生命。现在，罗巴切夫斯基的双目已经完全失明；开始大口大口地吐血，发烧，四肢乏力。但是他咬牙坚持。几何的研究成了他惟一的慰藉和寄托。他继续不分日夜地工作。他的心底依然怀着希望，期待着他的非欧几何理论得到承认的那一天的到来。

1855 年，喀山大学隆重庆祝 50 周年校庆。双目失明的罗巴切夫斯基拄着拐杖来到会场，亲自把自己一生科学生活的结晶——《泛几何学》一书献给母校。这是他一生的心血，他最高的信念和全部的希望。大会以后，罗巴切夫斯基一病不起。1856 年 2 月 24 日，这位一生为真理而战斗的战士停止了呼吸。俄罗斯母亲在伏尔加河畔又埋葬了一个优秀的儿子，一个悲苦的纤夫。

1892 年 12 月 1 日，在罗巴切夫斯基 100 周年诞辰，俄罗斯人民自动捐献建造的罗巴切夫斯基纪念像在喀山正式落成。这是俄国为纪念数学家而树立的第一座纪念像。簇拥在像前的五彩缤纷的花朵象征着非欧几何的鲜花已经在全世界遍地开放。非欧几何的创始人受到人们深深的怀念和敬仰。



阿贝尔

(1802—1829)

我完成了一座纪念碑；它比青铜浇铸的还要坚固耐久，比国王建造的金字塔更加雄伟高大。无论是侵蚀的雨还是狂暴的北风，也无论是数不清的漫漫岁月或飞驰的时代，都难以动它分毫。我不会全部地死亡；我更崇高的部分将摆脱死神之手；我将永远成长，在后世的赞美声中闪闪发亮。

——贺拉斯①

脚踩两个怪物的大力士

在挪威首都奥斯陆的皇家公园里，耸立着一座引人注目的雕像。一位赤身裸体的大力士，脚下踩着两个怪物。这两个怪物是什么？众说不一。有的说，它们是贫困和死亡；有的说，它们代表数学两个最重要的问题：椭圆函数论和用根式解代数方程。

不过，谁都知道，这位力大无比的力士不是别人，他是挪威人民的伟大儿子——尼尔斯·亨利克·阿贝尔。

其实，阿贝尔本人并不是大力士。恰恰相反，贫困和劳累使他从小就体弱多病；可怕的结核杆菌很快吞噬了他年轻的生命。

但是，在他文弱的身体里，蕴藏着无比的力量。虽然他在世上

---

① 贺拉斯（前65-前8）是罗马诗人，出身微贱，著有《讽刺诗集》两卷，《歌集》四卷，《书札》两卷，《诗艺》一卷，《长短句集》十七章等。

只生活了短短26年零8个月，却作出了震撼世界的伟大事业。他和雅可比一起创立椭圆函数理论，并且第一次证明了一般高于四次的代数方程的根式解的不可能性。阿贝尔所留下的思想，用法国数学家埃尔米特①的话来说，它足够后来的数学家忙碌150年！

憧憬未来

19世纪初，丹麦和它的附庸挪威同瑞典发生战争。瑞典是1523年从它们原先的三国卡尔马联合②中分离出去的。仗断断续续地打了好几年。瑞典仰赖英国的支持，终于取得优势。1814年，失败的丹麦把挪威割让给瑞典。战争以后，任人宰割的挪威满目疮痍，疲惫不堪。在那些年月，一个乡村牧师，没有生财之道，是很难维持一家几口的温饱的。1802年8月5日，尼尔斯·亨利克·阿贝尔正是出生在这样的一个牧师家庭。阿贝尔家祖辈几代在教会工作。父亲曾经就学于丹麦大学，表现出相当的才能。但是，大概是因为不善钻营，只好在克里斯蒂安③远郊的一个小村芬诺做牧师。继次子尼尔斯以后，又接连有5个小生命出世。做牧师的父亲告求无门，一家9口只好眼睁睁地苦熬着。阿贝尔家在村里穷得出了名；贫困的阴影笼罩了阿贝尔一生。不过，这只是家庭影响的一个方面。

从生理学的观点来看，人从母亲那里所受的影响是根本的。尼尔斯从母亲那里继承了两个特征：其一是动人的美貌。那是明摆着的。在柔软的灰色头发下，一张洋溢着才气的俊秀的脸庞，神情略带羞怯，谁见了都不由得要多看上两眼。另一个特征可不是一两句话就说得清楚了。安娜·玛利亚·西蒙松没有什么可以称道的业绩，

---

① 埃尔米特（1822-1901）是法国数学家，在函数论、代数和数论等诸多方面都有重大贡献。

② 卡尔马联合是1397年6月在瑞典卡尔马城结成的斯堪的纳维亚联合，挪威、瑞典和丹麦共戴一个君主。

③ 克里斯蒂安就是今日挪威首都奥斯陆。

主要以美貌著称。在有些人看来，她好享受，甚至有些疯癫；这似乎和她的乡村牧师妻子的身分不大相称。不过有谁论证过，乡村牧师的妻子就应该无尽无休地辛苦劳累一辈子，而不能有一点对人生欢乐的追求呢？安娜不愿孩子们在贫困中失去欢笑。虽然难得温饱，她有时候还要打扮她那些营养不良却依然美丽非凡的小天使。她的这种行为，好像是“穷开心”。其实，安娜并不是所谓“知足者常乐”这种说教的信徒。相反，她似乎有一种很难满足的心愿，以致对日常的缺吃少穿反而不大在乎。母亲的这种秉性，感染了她的孩子们。尽管受冻挨饿，阿贝尔家看来并不那么沮丧。你看，在冬日的晚上，阿贝尔家的小屋外是狂风飞雪统治着的冰天雪地，屋里却洋溢着春天的生意。一家人围着小炉子，一会儿讲故事、猜谜语，一会儿做游戏，不时爆发出欢快的笑声。因为穷，请不起家庭教师，父亲不得不在工作之余教尼尔斯和他哥哥识字和算术。和许多大数学家一样，尼尔斯很小就显示出数学才能。幸好父亲对数学略知一二，就对他着意培养。兄弟俩体谅父亲的辛劳，学习得比别人家的孩子更加刻苦。尼尔斯不愿多想现实中的贫困和种种不快。他沉浸在学习和思考中。他相信圣经和许多书本上的教导，只要努力行善，坚持不懈，光明美好的日子就会到来。他憧憬那遥远的未来，忍受着现实生活中贫苦的煎熬。

一个优秀的数学天才

19 世纪初，挪威和许多国家一样，男尊女卑的现象还很严重。妇女没有受教育的权利；男孩子才有上学的机会。13 岁的时候，尼尔斯和哥哥一道，被送到克里斯蒂安的一所天主教教会学校念书。这无疑是极大的幸运。财主家的小姐还没有这福分呢。还有一件事使尼尔斯觉得自己的运气不错。因为他入学考试成绩优异，学校决定发给他奖学金。这对在饥饿线上挣扎的阿贝尔家是个不小的福音啊。可是学校也并不是那么美好。这时候挪威的学校里还盛行体罚。

体罚被认为是使学生成才不可缺少的措施。可是实际上，体罚成了满足那些专横的教师的虐待狂嗜好的陈规陋习，而挨打的多是“懒虫”和“笨蛋”。尼尔斯同情挨揍的同学，常常用机灵的警告和幽默的解嘲来帮助和安慰那些不幸者。学年结束，阿贝尔兄弟俩都取得了优良成绩，学校发给他们书本作为奖赏。可是，新学年开始后，他们感到上课念书不那么有趣了。大量重复单调的作业，干巴巴的教条满堂灌，使孩子们大倒胃口。原来一些水平较高的教师应聘到一所新办的大学去了，剩下的和新来的教师怕成绩下降，便想“以多取胜”，大搞填鸭式教学，连天资过人的尼尔斯都难以接受。生来羸弱的哥哥在高压下被弄得神经衰弱，不得不退学回家，竟至以后再也无法学习和工作。这使尼尔斯十分难过。而那个教数学的教师，经常挖苦取笑学生，有时候甚至喝得醉醺醺的，大发酒疯，更使尼尔斯胆战心惊。有一次，这位教师竟拳脚交加地殴打一个学习吃力、身体瘦弱的学生。那孩子被打得站立不住，歪倒在课桌旁。尼尔斯惊呆了。等那教师走了，同学们才把他搀扶回家。第二天，他没有来上学；听人说，他病了。过了两天，更传来令人震惊的噩耗：那位同学死了！

尼尔斯目睹这人世间残忍的一幕，吃不下饭，睡不好觉，许多天都不见他诙谐的谈笑。整个教室沉寂下来，连最淘气的学生都蔫了。一些家长和社会人士到学校来抗议，还一直向上控告，最后，学校不得不把那个教师解职。

不久新来了一位年轻的数学教师，挪威数学家洪波依。他一边让学生思考，一边慢慢地启发，并不搞体罚的那一套。他的讲解清晰透彻，还不厌其烦地教育大家：精巧的论证常常不是一蹴而就，而是人们长期切磋积累的成果。他甚至坦率地告诉学生，他也是慢慢学来的，而且还要继续不断地学习。他的博学和谦和，同那粗暴愚昧的前任相比，真有天壤之别。阿贝尔深深喜爱上这位洪波依老师，并且大大激发起学习数学的热情。阿贝尔敏捷的反应和严密的思维，很快被洪波依老师发现。于是老师不时地给出一些较难的问

题。这些难题同样难不住阿贝尔。他发觉，只要紧紧把握住各种概念，通过持久的思考，就可以找到解决各种难题的线索。能够体验到从无知到有识的快乐，真是幸福。不过，阿贝尔知道，自己不应该骄傲，更不能欺侮那些不幸的迟钝的同学。

学期末了，给学生写评语的时候，洪波依老师首先想到了阿贝尔。这个衣着破旧、被同学们起绰号为“阿贝尔裁缝”的孩子，既聪明又勤奋，心地善良，真是难得啊！洪波依拿起鹅翎笔，饱蘸墨水，深情地写道：

“一个优秀的数学天才。”

阿贝尔学习的热情越来越高。他很快熟练地掌握了初等代数的概念和方法，精通了欧几里得几何的事实和推理，领略到古典数学难以形容的和谐与优美。洪波依老师以更大的热忱来培养阿贝尔，并且把自己在大学学习的课本全部送给他。这样，在放学以后，当别的学生在游玩嬉戏的时候，阿贝尔却跟着洪波依老师兴致勃勃地在深奥而迷人的数学宫殿里流连忘返。

初生牛犊不怕虎

洪波依老师算不上是富有创造力的数学家。但是他了解而且喜爱数学名著。在他的支持下，16 岁的阿贝尔直接向那些历史上大数学家学习。他不怕牛顿、达朗贝尔著作的艰深，也敢于去揭高斯《算术研究》的七道封漆。大师们探讨的都是一些根本性问题。他们的分析触及问题实质，切中要害。这种阅读带来的喜悦是无与伦比的。更重要的是，在这样的学习中，阿贝尔树立了继往开来的雄心大志。他摩拳擦掌，要向一个历史上久攻不克的堡垒——寻求五次以上代数方程的求根公式——发起进攻了。

每个好学的初中同学，在掌握了一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0$$

的求根公式

$$x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$$

以后，都可能发问：三次、四次以至一般的高次方程，有没有这类求根公式？如果有，是什么样子？阿贝尔自然也想到了这个问题。

历史上，二次方程求根公式，在公元前1000多年巴比伦人实质上已经掌握了。但是，三次、四次方程一般情况下就难解得多。直到16世纪，才由意大利数学家费罗（1465-1526），塔尔塔利亚①。卡尔达诺和他的学生费拉里（1522-1565）等人先后解决。代数方程求根是数学的一个基本问题。后来，数学家在研究根的存在性和近似解的同时，继续寻求五次以上方程的求根公式，笛卡儿、牛顿和莱布尼兹等大数学家都认真追求过这个问题的解答，但是一直没有成功。阿贝尔在研读高斯《算术研究》的时候，受到高斯对二项方程讨论的启发，想试着用高斯的方法，来求一般五次方程的解。凭着“初生牛犊不怕虎”的劲头，阿贝尔不断地演算下去。通过对方程系数作加减乘除和开方这些代数运算，他居然得到了根的表达式。这不就是人们梦寐以求的五次方程的根式解或代数解吗？他非常兴奋，可是又不大放心。他把自己的推算从头到尾看了两遍，没有发现问题。他把稿子送给洪波依老师审查。洪波依看不出究竟，又去请教他的大学老师。连他的大学老师、著名的天文学家汉斯廷教授在内，挪威大学的教授们都不能评定阿贝尔的研究。考虑到北欧诸国中数学发展水平数丹麦最高，汉斯廷就把阿贝尔的手稿寄给丹麦的学有创见的德根教授，并且告诉他，如果确有价值，就请丹麦科学院予以发表。德根认真地看了阿贝尔的文章，也没有发现什么破绽。不过根据他的经验，这种久攻不克的大难题，一般不可能沿用旧的想法、套取现成的结论就轻而易举地解决的。因此，为慎重起见，他建议阿贝尔用一些实际的例子来检验自己的理论。实践是检验真理的标准，数学上也是这样。德根回信向汉斯廷说明，即使最

---

① 塔尔塔利亚（1499-1557）原名冯塔纳，幼年被法国兵打伤面部而引起口吃，因而被加上了“塔尔塔利亚”的诨名，意思是口吃者，后世就以这一名字相称。

终判明阿贝尔的结果是错的，他的研究也表明，他是一个富有数学才能的人。他建议阿贝尔花功夫去研究一个称为椭圆积分的难题，它是在计算椭圆的弧长和分析单摆运动中发现的一类积分问题。这个课题对整个分析数学和力学都将产生巨大的影响。他说：

“一个努力而有才干的学者，不会局限于具有优美性质的函数，他将发现麦哲伦海峡，从而进入广阔无际的分析数学的海洋。”

阿贝尔从高斯《算术研究》的学习中，对椭圆积分已经知道一点。欧拉、拉格朗日、勒让德等人都在这方面做过工作。他接受了德根教授恳切的忠告和影响深远的建议。不久，他通过实际例子检查，发现自己对五次方程的根式解果真有错。不过他没有气馁。他认真地阅读了拉格朗日长达200多页的论文《关于方程代数解法的思考》。拉格朗日说：“虽然关于求解的不可能性什么也没有证明，”不过可以肯定，“用根式解高于四次的方程是不可能解的问题之一。”他甚至认为，这个难题是“向人类智慧的挑战”！伟大的数学先驱者的这一番话把阿贝尔深深打动了。面对这严峻的挑战，拉格朗日深感力不从心。因此，他对数学的前途感到悲观。但是，对阿贝尔来说，这不是一瓢凉水。不，恰恰相反：这是进军令，是冲锋号，是一把熊熊的大火！阿贝尔浑身热血沸腾。他决心接过先驱者手中的火炬，把这场战斗进行到底。

深情厚谊

中学毕业了。

洪波依老师给阿贝尔作了热情的评语：

“一位数学天才，……如果他继续成长，可能会成为大数学家。”

但是，父亲的死给尼尔斯带来深沉的悲痛和优伤。原本就穷得够呛的日子，现在只剩下母亲那点养老金，往后怎么过啊。哥哥精神失常，难以工作；只有自己能帮妈妈挑起养家糊口的重担。尼尔

斯想上大学深造，也希望他的弟妹能上学读书。可是瘦弱的尼尔斯能干什么活，挣多少钱呢？

洪波依看到阿贝尔的困境很不安，决心不让贫困扼杀一个数学天才的成长。他去找教授们帮忙。通过汉斯廷教授，他们已经知道阿贝尔是个不可多得的人才。大家纷纷慷慨解囊，从各自的薪金中抽出一点钱来扶持这个贫穷的学生。当时的教授们和他们的祖国一样，也都穷得可怜。不过，钱虽少，他们的情谊使阿贝尔永志难忘。当时的大学没有奖学金，但是有免费的宿舍供穷苦的学生居住。阿贝尔得到特许，让他的弟弟和他同住在这样的宿舍里。

阿贝尔很清楚，他是在老师和朋友们的支持下上大学的。他只有格外努力学习，来报答师友。在他们用得着的时候，比如替孩子补习功课之类的事，他总是尽力而为。实际上，教补习生历来是穷大学生一种半工半读的形式。阿贝尔也常常去看望师友，受到他们热忱的接待。特别是汉斯廷教授夫人，对谦逊有礼、勤奋好学的阿贝尔非常关怀。她十分同情这个贫苦的学生。她常常用各种借口，把阿贝尔请来，让他在家里吃一顿可口的饱餐；看到阿贝尔的衣服破了或太单薄了，就亲手为他缝制衣服。

阿贝尔的学业突飞猛进。上大学刚一年，他就取得初等学位。当时大学里没有高等数学之类的必修课程，这使他可以自由地研究自己感兴趣的课题。在继续代数方程和椭圆积分研究的同时，他学着欧拉、拉格朗日把数学用于分析力学。他发现用积分方程可以描述质点沿曲线运动的问题。他构思了一种巧妙的方法得到那积分方程的解。他还不满足。接着他又用另一种方法得出同样的解答。自觉地直接应用并且解出积分方程，这是数学史上的创举。他整理自己的成果，写出两篇文章。正好汉斯廷教授准备创办一份自然科学杂志，于是，阿贝尔的处女作就发表在它 1823 年的创刊号上。阿贝尔对积分方程的开创性研究很有意义。可惜当时数学家还没有充分认识它。积分方程的蓬勃发展，它的一般理论的建立，要到 19 世纪末和 20 世纪初了。

哥本哈根之行

1822年6月，19岁的阿贝尔大学毕业了。在整个斯堪的纳维亚，他已经显得过于巨大。他渴望去法国，那是当时世界数学的皇后，是拉格朗日、拉普拉斯和勒让德这“三L”的祖国。虽然拉格朗日已经去世多年，拉普拉斯也因为年迈，没有在工作，但是，勒让德还健在，特别是一颗新升起的明星——柯西，使其他人黯然失色。除此以外，巴黎还有一大批伟大的同行。只是阿贝尔不知道，他自己已经远远超过他们中间的一些人。他当然也梦想着到德国去拜望老高斯。他是世界上无可争辩的“数学王子”。

阿贝尔的数学和天文学界的朋友们支持他的想法；他们联名呼吁政府资助阿贝尔出国研究。为了加深当局的印象，阿贝尔特别写了长篇论文请大学出版。他相信这篇文章一定会给挪威增光。可是，挪威大学的财政异常拮据，论文的印刷被一拖再拖，最后竟不知下落。不过，经过交涉，政府总算同意，发给阿贝尔一份津贴，让他在大学里攻读法语和德语。

夏天，老天文学家拉斯梅辛拿出一笔钱，供阿贝尔去丹麦考察研究。这是阿贝尔第一次出门远行。从克里斯蒂安到哥本哈根，路程并不算远，但是路上的一切都使阿贝尔感到新鲜。大海和日出，教堂和风车，牧羊童和挤奶妇，……他惊奇地发现，现实的世界和数学世界一样，也是那么美妙和令人陶醉！德根教授在家门口热烈欢迎阿贝尔的到来。阿贝尔就住在教授的家里。从早到晚，他当面聆听这位老前辈的分析和教诲，得益非浅。

哥本哈根的挪威学生和朋友们热情接待他们的数学才子。有一次，他们邀请他参加一个舞会。这使阿贝尔感到为难，因为他对跳舞一窍不通。但是盛情难却，他痛痛快快地答应了。

在舞会上，一对对、一双双翩翩起舞，舞兴正浓。阿贝尔发现，有一个女孩子和自己一样，一个人冷清清地坐在角落里呷着咖啡。

别人可能觉得她并不漂亮。矮矮胖胖的，红头发，脸上长着雀斑。阿贝尔却喜欢她纯朴天真的神态。看样子她不会使自已难堪，于是，阿贝尔鼓起勇气邀请她一起跳舞。姑娘大方地站了起来。可是，跳不一会儿，他俩发现，对方和自己一样，并不精于此道。两人同时停了下来，不觉相对会心一笑。这使阿贝尔愈发感到她的诚挚友好。原来，这位克里斯廷小姐也是穷苦出身，靠做家庭教师和缝纫自立。阿贝尔不知不觉爱上了克里斯廷。姑娘的感情也十分真挚而且热烈。阿贝尔的哥本哈根之行，就在那充满阳光、饱含幸福和欢愉中度过。

回到挪威，阿贝尔把克里斯廷介绍到克里斯蒂安附近的一个小镇芙乐兰工作。他俩订婚了。

成功和失望

拉格朗日的话时时在阿贝尔的耳边回响。说得多好啊，“向人类智慧的挑战”！阿贝尔可不是知难而退的懦夫。恰恰相反，愈是困难的挑战，愈能激起他的热情。这正是每一位具有独创精神的大科学家所具备的品质。他彻底检查了解决这个难题所应该遵循的道路。他发现，一个方程，由于计算过于复杂，人们花了大量精力没有把它解出来，但是，这不等于这个方程不可能有代数解；反过来，虽然找到了某个方程的代数解，我们并不能由此推断一般方程存在代数解。因此，他认为：

“不要去寻求一个不知道是否存在的关系，而必须先问一问这样的关系是不是可能的。”

这样，阿贝尔就为解决这个大难题找到一条明确的、万无一失的途径：

“1. 找出代数上可解的任意次数的一切方程。

“2. 决定一个已给的方程在代数上是不是可解。”

阿贝尔说，这两个问题实质上是相同的。虽然方程的代数解存

在的充分必要条件要留待伽罗瓦来最终解决，但是，阿贝尔迈出了意义重大的一步。他以无可比拟的天才证明了使数学家们为难了几百年的大难题：一般高于四次方程不可能有代数解。

为了得到这个证明，阿贝尔绞尽了脑汁。由于他不了解拉格朗日一个热忱的弟子、意大利数学家鲁菲尼的工作，阿贝尔的“不可能性”证明几乎是从头做起。经过数不清的迂回反复，他发现了被后人称为阿贝尔定理的重要成果。鲁菲尼在1799年已经知道这个结论，但是没有严格地证明。正是利用这个结论，阿贝尔作出了人们孜孜以求的“不可能性”的严格证明，以光辉的“阿贝尔-鲁菲尼定理”为名载入史册。从此以后，无论是杰出的数学家还是普通的爱好者，都不必再徒劳地去寻求那根本不存在的五次方程求根公式了。这时阿贝尔才22岁。

为了扩大影响，阿贝尔用法文写出研究报告，并且决定自筹经费付印。可是，他实在太穷了。为了降低印刷费用，他不得不把论文的篇幅一压再压。最后印出来，只剩薄薄6页了。但是，这薄薄的几片纸是阿贝尔对数学先驱者们的卓越工作的继承和发展，凝结着他多年的心血，闪烁着他天才的光辉。1824年7月，他怀着满腔希望把论文寄给国内外有名的数学家，包括当代数学界的领袖高斯。他期望得到他们的承认和支持。一个月、两个月过去了。寄出的论文像石沉大海，毫无反应；有影响的刊物也毫不理会阿贝尔历史性的突破。阿贝尔深深地失望了。

许多人常常责备高斯，说他过于傲慢，看不起别人特别是年轻人的成果。对于这件事，我们可以设想一下，如果今天有一个年轻人，写信给一位权威的数学家，声称自己解决了历史上著名的方圆问题——用圆规和直尺作出了和圆面积相等的正方形，结果会怎样呢？这位数学家可能会客气地给他回一封信，也可能什么也不写。但是有一点可以肯定，他会把寄来的论文看也不看就扔进废纸篓里。

因为方圆问题的不可能性早在 1882 年已经由林德曼①给予证明。高斯可能也是这样。他看到一个默默无闻的挪威青年居然想用 6 页纸来对代数上著名的大难题下判决，岂不是太狂妄了吗？他没有屈尊把它看上一眼，就厌恶地抛到一边：

“太可怕了，又一个怪胎！”

有人说高斯保守，这有几分道理。和方圆问题不同，五次以上方程的代数解的不可能性在阿贝尔以前是还没有证明的。正是这个腼腆的挪威青年提供了一个天才的证明。是的，这个证明还说不上完美无缺。它有许多不必要的复杂论证，不够简明扼要，而且篇幅被大大压缩，以致读起来非常吃力。但是，要是高斯能耐着性子把它看上一遍，结果将会怎样呢？他只要说一句话，阿贝尔就成名了。阿贝尔就可以不背着沉重的贫困的包袱而在生命的中途不幸倒下。我们的故事也就大不相同了！

具有讽刺意味的是，高斯本人在青年时代曾经遭到过同样的冷遇。那是 1796 年 4 月的一天。高斯兴冲冲地带着他正多边形作图问题的证明去找他的大学老师凯斯特纳教授。凯斯特纳不相信，想把高斯打发走。他不愿花时间去检查高斯的证明，企图从里面找出假定上的错误。这一招没有成功，他就告诉高斯：这个作图法并不重要，因为谁都知道实际的作图是什么。当然，他心中清楚，这种实际的近似作法和高斯的理论证明毫不相干。高斯向他说明自己曾经解出了一个 17 次代数方程。凯斯特纳说这是不可能的。高斯解释说，他把这个问题化简成为解一个低次的方程。凯斯特纳嘲笑说：

“噢，我早就这样做了。”

对于“小人物”抱这样冷漠的态度，高斯十分不满。因为凯斯特纳曾经炫耀过自己的诗作，高斯后来就用“凯斯特纳是数学家中最好的诗人，是诗人中最好的数学家”来回敬凯斯特纳。

① 卡尔·林德曼（1852-1939）是德国数学家。他证明了 π 是超越数，这个证明确定了古希腊化圆为方问题只用圆规和直尺是不能解决的。

事情就是这样奇怪。过了不到30年，现在轮到阿贝尔来埋怨高斯了。我们的数学王子如果知道了会有什么感想呢？

喜遇“伯乐”

在阿贝尔的朋友们积极活动下，1825年8月27日，王室政府发布一条法令，宣布发给阿贝尔一份津贴，供他去德国和法国旅行和研究一年。政府拿不出更多的了。在全国处于忍饥挨饿的困难时刻，阿贝尔还能要求什么呢？

1825年9月，虽然懒洋洋的阳光给人以几分温暖，萧瑟的秋风却已经咄咄逼人了。阿贝尔告别亲人和师友，踏上漫漫的旅途。他依恋克里斯廷，也惦念着贫困中的妈妈和弟妹们。是的，他向往法国和德国，渴望着和外国同行们切磋交流，赢得他们的支持。不过，他心里确实惴惴不安。那些高傲的大学者会怎样对待自己呢？

阿贝尔先到哥本哈根，拜访了丹麦著名的数学家和天文学家。遗憾的是，亲爱的德根教授不久前去世了。他又转往德国。在汉堡，他改变主意，不是急着去格丁根拜望高斯，而是向东来到柏林。高傲的高斯使他失望。他不愿低声下气地去求见他。他甚至埋怨德国人，瞧不起像他这样的“小人物”。没有想到，他在柏林遇到了一位出色的人物，使他大大改变对德国人的偏见。这个人的名字就是奥古斯特·利奥波德·克列尔。①

如果说克列尔使阿贝尔赢得声誉，那么阿贝尔给了他加倍的回报。克列尔成为今天西方数学界“伯乐”的代名词；而“克列尔”代表着他所创办的伟大季刊的专有名词。这个季刊的头三卷刊载了阿贝尔22篇论文。《克列尔杂志》使阿贝尔在欧洲大陆闻名遐迩；阿贝尔的伟大工作一下子使杂志出了名，而这份刊物最终使克列尔

---

① 奥古斯特·利奥波德·克列尔（1780-1855）是德国数学家和工程师，他促进了当时许多年轻数学家的工作和事业的发展，创办了《纯粹数学与应用数学杂志》，即《克列尔杂志》。

名垂千秋。

克列尔本人与其说是位创造性的数学家，不如说是一位自学的数学爱好者。他的专业是土木工程。他建造了德国第一条铁路，使他名利双收。他在闲暇的时候从事数学研究多少有点像业余嗜好。他在1826年创办的《纯粹数学与应用数学杂志》（也就是（克列尔杂志））给予德国数学以巨大的刺激。这是克列尔对数学发展的最伟大的贡献。

《克列尔杂志》对过去著作的解释是不受欢迎的。著作（克列尔本人的某些著作除外）只要是新的、真实的和充分“重要”的，不论作者是谁，都可以发表。从1826年到今天，每季度一期，从不间断。两次世界大战的烽火几乎把《克列尔杂志》毁掉。但是，在全世界订户的大力资助下，它顽强地坚持了下来。

1825年冬天，克列尔正在酝酿这项伟大的事业。这时候，他还兼任着一份公职——商业学校的考试官。不过，他在这方面既缺乏能力，也缺乏兴趣。阿贝尔的突然出现促成克列尔决心的实现。关于这次历史性的会晤，克列尔有一段生动的回忆：

“一个晴朗的日子，一位羞怯的、年纪挺轻的青年走进我的办公室。他的脸看上去非常年轻，非常聪明。我以为他大概是商业学校的考生，所以我向他说明必须考几门不同的课程。说了半天，小伙子开了口。他的德语并不高明，”不是考试，是数学。“

一听是数学，克列尔的兴趣立刻提了起来。数学是他心爱的课题。他发现阿贝尔不是德国人，就试着用法语同他交谈。阿贝尔对法语勉强听得懂。

“那么，亲爱的先生，您能不能谈谈自己在数学方面做过些什么工作呢?”克列尔好奇地问。

“哦……我读过一些书，”阿贝尔斟酌着字眼，彬彬有礼地答道：“我也读过先生您1823年的大作和最近发表在《分析技巧》上的新作。这些著作都很有意思，不过……”接下来，他就不那么“有礼”了：“那里面有几处错误。”说到这里，阿贝尔偷偷地瞧了

克列尔一眼。

这正是克列尔的难能可贵之处。他不因为年轻人冒犯自己而感到恼怒。相反，他认真地想听听阿贝尔的详细意见。阿贝尔用蹩脚的法语连比带划地解释了半个多小时。虽然根据克列尔的数学水平，他只听得懂阿贝尔讲话的十分之一，但是，有一点他是清楚了。可靠的直觉告诉他：阿贝尔是第一流的数学家。在会晤结束以前，他已经打定主意，阿贝尔必须是拟议中的《克列尔杂志》的第一批撰稿人之一。

其实，谈了半天，阿贝尔还有很大的保留。他怕自己过于坦率地说出意见会引起克列尔的不快。因为他是来寻求支持而不是来讨论分歧的。当然，克列尔也不是真的想知道自己究竟错在哪里。他是想摸清阿贝尔的底细。于是，他问阿贝尔还看过哪些著作。当阿贝尔提到牛顿、欧拉、拉格朗日和高斯这些大师们的名字的时候，克列尔的耳朵竖了起来。他们讨论起若干著名的尚未解决的难题。这时候，阿贝尔鼓起勇气向克列尔提出自己关于一般五次方程代数解的不可能性的证明。克列尔不打算听下去，他认为这一类证明一定有什么问题。不过他收下了证明的抄件，还翻来覆去地看了两遍。他承认推理超出了自己理解的水平，但是，这并不妨碍他在1828年的《克列尔杂志》上发表阿贝尔的详尽证明。这就是克列尔。他的数学水平不算高，但是他心胸开阔，看人入木三分，而且惜才如命。他是一位伟大的人。

克列尔决定充当阿贝尔的保护人，尽其所能要使他得到社会的承认。他带着阿贝尔参加各种活动，并且认为这是自己最好的“数学发现”。自学成才的瑞士人斯泰纳①，被人誉为自阿波罗尼奥斯以来最大几何学家，有时候也陪着他们。克列尔的朋友们看见他一手拉着一位天才就会喊起来：

① 斯泰纳（1769-1863）是瑞士几何学家，在射影几何上有重大贡献。

“瞧，亚当爸爸带着他的该隐和亚伯来了！”①

克列尔的热情接待使阿贝尔深受感动。他写信给汉斯廷教授：

“的确，在这里对我感兴趣的人很少，但是，这很少几个人和我却是无限亲近的。因为他们向我表示了这么多友好的情谊。或许我能以某种方式来报答他们对我的期望，否则的话，对他们会是很难受的。”

接着他告诉汉斯廷，克列尔怎样恳请他永久留在柏林，并且运用自己的影响使阿贝尔成为柏林大学教授。这是1826年的德国。当时的德国需要最好的数学家，至于阿贝尔是一个外国人是无关紧要的。

但是，应接不暇的社交活动使阿贝尔很难安下心来研究。他悄悄来到德法边境的弗赖堡。那里环境幽静，风景如画。他要加紧工作来弥补失去的时光。他的才思随着他一刻不停的笔尖滚滚而出。果然不负众望，他最伟大的作品雕凿成形了。这就是后人称为阿贝尔大定理的发现。不过，他得先到巴黎去拜访当时法国最大数学家——勒让德、柯西和其他同行。高斯不理睬他；他希望法国的同行能够了解他。

喧闹的“沙漠”

阿贝尔满怀希望，离开弗赖堡，取道瑞士和意大利，于1826年7月来到巴黎。巴黎绚丽的色彩使阿贝尔眼花缭乱。不过他无心观赏。号称世界花都的巴黎，是属于有钱人的。他住在一家贫苦的人家。他们供给他一天两餐很差的食物，一间极简陋的居室，收取的房租却高得惊人。4个月以后，他写信给洪波依谈到他的印象：

“跟你老实说吧，这个大陆上最喧闹的城市，暂时对我来说就

① 根据基督教传说，该隐和亚伯是亚当和夏娃所生的长子和次子。“亚伯”和“阿贝尔”在外语中是同一字 Abel，我国《旧约》译文中译作“亚伯”。

像是沙漠。我实际上什么人也不认识；这是个可爱的季节，每个人都在乡下。……法国人对陌生人比德国人冷淡得多。要得到他们的亲善特别困难。到目前为止，我不敢畅谈我的看法；在这里，一个小人物要引起注意有大量的困难。我刚刚完成一篇关于某一类超越函数的长篇论文，下星期我要把它提交给法国科学院。我给柯西先生看过，可是他对论文几乎不屑一顾。而我敢说，不是自夸，这是一篇佳作。我好奇地想听听科学院对它的意见。我将让你和我分享。"

实际上，他对于这篇论文的结局似乎已经有不祥的预感。因此，他向洪波依抱怨：

"我后悔把旅行安排为两年。一年半就足够了。……有这么多的事情留待我来做，而我只要留在国外，一切就都糟了。"

阿贝尔在信中提到的佳作——《关于很广一类超越函数的一个一般性质》——被认为是他一生中最伟大的作品。在文章一开头，他表明自己的意图：

"到目前为止，数学家们所考虑的超越函数的数目是很少的。特别是超越函数的全部理论被压缩为对数函数、圆函数[①]和指数函数，实质上，这些函数只构成单一的类型。直到晚近，才开始考虑一些其他的函数。其中椭圆超越函数占据首要的地位。椭圆函数的某些显著的和优美的性质是由勒让德先生发掘的。在有幸呈交给科学院的本文中，作者考虑了很广一类超越函数，也就是说，这些函数的导数可以由代数方程来表示，方程的系数是单变量的有理函数；作者同时证明了这些函数有类似于对数函数和椭圆函数的性质。"

阿贝尔的引言很容易引起误会，以为勒让德曾经像阿贝尔所恭维的那样讨论过椭圆函数。这是不确切的。阿贝尔这样提到这位老数学家完全是出于友好和礼貌。事实上，勒让德长期研究这个重要问题，可是没有找到关键。他所研究的是椭圆积分而不是椭圆函数。

① 圆函数即三角函数。

椭圆函数和椭圆积分的不相同就像马和马所拉的车的不同。俗话说“把车放在拉它的马的前面”，或者说本末倒置，正好用来形容勒让德的工作。阿贝尔把它们颠倒过来。它引进了椭圆积分的反函数——椭圆函数，正好抓住了探索椭圆积分问题的关键。“把考虑问题的顺序颠倒过来”，这看来十分简单，却是数学和科学发现的最强有力的方法之一。继承和授予，输入和输出，直接函数和反函数，椭圆积分和椭圆函数，一个方向考虑不下去，不妨反过来试试。这种方法导致19世纪最重大突破之一，也是阿贝尔对数学最为巨大的贡献。因此，埃尔米特认为，阿贝尔的思想足够未来的数学家忙碌150年，而一生从事教师工作的维尔斯特拉斯总是督促学生好好阅读阿贝尔的著作。

可是，阿贝尔这篇希世之作的遭遇却是令人痛心的。

科学院让勒让德和柯西负责审阅。勒让德74岁了，年迈力衰，已经丧失敏锐的理解力。他没有看懂，就把它交给柯西。后来，勒让德在给雅可比的信中为自己辩解：

“我们发觉论文的字迹很难辨认，它的墨水几乎是白的；字写得歪歪扭扭；我们一致商定，作者应该把论文誊写清楚。”

这是什么借口！年方39岁的柯西正忙于自己范围广泛的研究，哪有心思去多管“闲事”！他把论文带回家，随手一丢，完全把它忘了！后来，只是由于奇迹，这篇被遗忘的杰作才得重见天日。事情是这样的，阿贝尔研究上的知音、比他小两岁的雅可比，当时是柯尼斯堡大学的数学教授。他从勒让德那里得知，阿贝尔在临终前三星期在给勒让德的信中曾经提到被法国科学院抛到一边的那篇著作。他为阿贝尔深感不平，就不辞辛劳赶到巴黎。他花了九牛二虎之力，终于在柯西积满灰尘的旧书堆中找到那篇被遗忘的手稿。不用说，那上面根本没有作过任何评审。雅可比双手捧着论文，激动得声音都颤抖了：

“这是阿贝尔的一个什么样的发现啊！……有谁见过这样的发现？这个发现，可能是我们这个世纪最为重大的数学发现，两年前

提交给你们科学院，却被你们的同事们扔到了一边！”

消息传到挪威，整个国家沸腾了！挪威驻巴黎的领事向法国提出正式抗议。法国科学院不得不表示歉意。可是，它对自己的行为遗憾到什么程度呢？论文一直拖到11年以后才刊印在法国科学院论文汇编第7卷上，而在清样校阅以前，珍贵的原稿竟不翼而飞了！

迟到的正义

一切是那么遥远，那么冷落，那么令人失望，就像巴黎阴冷的，看不见尽头的雨夹雪。阿贝尔感到冷，透心砭骨的冷。无论穿多少衣服，他都感到冷。他病了。医生告诉他，这是肺结核，这在当时几乎是绝症。年纪轻轻的，刚开始生活，就染上了绝症。阿贝尔无法接受这个残酷的事实。他离开冰冷的巴黎，回到柏林。想到自己只身漂泊在外，身患绝症，前途茫茫，心中不觉无限忧伤。只有想到研究工作，他才充满信心和活力。数学上新的想法不断涌现。他要抓紧时间把它们整理出来。他婉拒了克列尔的盛情挽留，决定动身回国。

出国的时候，阿贝尔满怀希望。现在，他精疲力竭，身无分文。盘川还是从洪波依老师那里借的。他所向往的未来是那样的遥远，就连从克里斯蒂安到芬诺的家里，也是一眼望不到尽头。他细汗涔涔，呼吸急促，不得不靠在教堂的大门上休息。……

为了养家糊口，阿贝尔重操旧业，给各种各样的学生补课。从小学生到准备考大学的中学毕业生，从外语到数学，可以说无所不教。酬金少得可怜，教少了还不行。他的肺病愈来愈重了。克列尔得知阿贝尔回国以后的困境，想在柏林一所新建的工学院里为他谋一个职务，可是，这不是一下子就能实现的。还好，不久汉斯廷动身去西伯利亚考察，军事学院批准阿贝尔代课，讲授力学和理论天文学。虽然是汉斯廷教授保荐的，他也只能得到汉斯廷薪水的三分之二。在这里，同工同酬是不存在的。不过，这对于阿贝尔已经是

不错了。他可以摆脱教补习生的沉重负担，来完成他椭圆函数论的研究。论文一篇篇发表，研究不断取得进展。通过雅可比的介绍，阿贝尔和雅可比的工作终于惊动了老勒让德。他看到阿贝尔引进椭圆积分的反演，抓住了探索椭圆积分的关键，不禁自叹不如：

“这个年轻的挪威人的智力是多么高啊！”

他称赞阿贝尔的工作是“不朽的丰碑”。老人得知阿贝尔的困境以后深感不安，想必也知道过去对他怠慢了。他亲自写信给瑞典国王，吁请他为附属国的这位天才安排一个职务。

受到勒让德的赞美和关怀，阿贝尔当然很高兴。他在给勒让德的信中，表达自己的感激之情：

“当我看到我的工作能值得本世纪一位大数学家的关注时，这成为我一生中最快乐的时刻之一。”

但是，这时候的阿贝尔远不是沉浸在欢乐之中。前景并不是一片光明。贫穷一直像影子一样没有离开过阿贝尔。他撰写的专著没有钱出版。没有一个出版商愿意冒险出版这种销路不大的数学专著。而这还不是他最大的痛苦。他最悲伤的是，他知道自己的生命很有限了。

阿贝尔回国以后，沉重的工作和不良的营养，使他的病情迅速恶化。1828 年整个夏天。他一直在发烧、咳嗽。入秋以后，健康毫无起色，咳嗽反而更厉害了。但是，妈妈从小教育他愉快乐观，即使穷得不行，在别人面前也决不能愁眉苦脸。因此，他要尽力保持自己在人们心目中的乐观形象。不过，剩下他孤独一人的时候，衰弱的身体使他很难集中精神思考。他心烦意乱，非常痛苦。他毫不怀疑，只要身体好，自己一定能够在数学的许多领域继续深入下去，得到有意义的成果。可是，现在不可能了。他只能勉强支撑着，承受那愈来愈难以忍受的生活重担。

热心的克列尔一直关怀着阿贝尔。他筹了一笔款子作为“稿费”，寄给阿贝尔。他一心希望这位有才能的年轻人不断前进。他把雅可比的研究进展告诉阿贝尔；他要阿贝尔把他的椭圆函数专著

寄来，不论多长，他都全部刊登。阿贝尔看着来信，不禁热泪盈眶。但是，他不得不告诉克列尔：

“我已病倒一个时期了。我不得不躺在床上。我很想工作，可是医生警告我，即使我现在好转复原，任何劳心费神的事都将对我有极大的伤害。”

看到这样的回信，精明强干的克列尔不禁黯然神伤，久久不能平静。尽管是圣诞佳节，他待不住了。他要为改善阿贝尔的处境大声疾呼。他去求见知识界“大祭司”式的人物，亚历山大·冯·洪堡。这位以研究“宇宙”为己任、远涉重洋到美洲探险、以博学闻名全欧洲的自然科学家，表示支持克列尔的努力。可惜，洪堡奖学金当时还没有设立，不能使阿贝尔受惠，在20世纪，洪堡奖学金倒是帮助了一些留学生。

正当克列尔为阿贝尔四处奔走呼吁的时候，该死的结核杆菌正在大口大口地吞噬着这位天才的年轻的生命。圣诞节热闹过去，阿贝尔觉得自己更不行了。在精神稍微好些的时候，他赶紧把自己在方程论方面的进一步结果整理出来。虽然一般五次以上代数方程不可能用根式解，但是一些特殊的高次方程还是可以用根式解的。阿贝尔找到了一大类可以用根式解的高次方程。他把这类后人称为阿贝尔方程的结果告诉克列尔和勒让德。克列尔看到重病中的阿贝尔继续在研究中取得进展，更为自己的无能为力而痛心。他几经周折，终于征集到高斯和勒让德称赞阿贝尔的信件。于是，他直接向教育部长写信：

“尊敬的先生，我希望你尽快地批准阿贝尔的职务。现在这个伟大的天才已经出名了。他很可能被聘请到别的地方工作。我刚得到消息说，丹麦哥本哈根大学准备聘请他，那么他就不会来这里服务了。”

其实，克列尔的努力已经没有用了。从3月起，阿贝尔不断吐血，身体极度虚弱，一直躺在床上。他甚至连提笔写字都已经不可能了。不久，心力衰竭使他发生昏迷现象。昏迷中，他又想到穷苦

的童年。他并没有怨天尤人。他在喃喃自语中念叨着汉斯廷夫人对他的关怀和爱护。他在内心深处感激帮助过他的师友。他想着友爱和温暖，美好和光明。生活中使他留恋的事物太多了！

4月5日晚上，北欧早春的夜晚寒气逼人。阿贝尔感到呼吸很困难。一种说不出的压抑使他透不过气来。他痛苦地挣扎着。亲人们轮流守护了他一夜。黎明，他平静了一点，慢慢地昏昏睡去。第二天上午，似乎好一些。下午，克里斯廷单独守护在他身边。他的神志又不清醒了。阿贝尔显然在挣扎：

"我还有许多工作……"

克里斯廷赶紧俯下身去，把手递给他。

"克列尔帮我找工作，怎么还没有消息？……我还要照顾妈妈、弟弟、妹妹，……可怜的克里斯廷，亲爱的，我们的家多么遥远啊！……我美丽的姑娘，你像是迎春的雏菊，多么高贵和纯洁。我死了怎么办呢？"

也许觉察到未婚妻无声的抽泣，他又挣扎着说下去：

"不！我会好的。春天来了，我们的日子会好起来，……"

突然，握着姑娘的手松开了。他那睁大的眼睛还噙着泪水，牢牢地盯着前方。但是，那遥远的、他日夜渴望和追求着的美好的未来啊，他永远看不到了。克里斯廷伏倒他身上失声痛哭。她心爱的人已经离开人世了。

3天以后，克里斯廷接到克列尔给阿贝尔的信：

"我已经从教育部负责人那里知道，你的职务确定了。我想尽快地让你知道这个好消息。你现在完全不必忧虑了。你属于我们，安全就有保障。我非常高兴，犹如我自己得到这个职务一样。你可以准备起程了。"

好心的克列尔啊，是的，阿贝尔是起程了。他孤独一人起程到我们再也见不到的地方去了。姑娘读着读着，又失声痛哭起来。

阿贝尔在贫病中夭折，使亲友们至感悲痛，也惊动了国际数学界。巴黎科学院赶紧弥补自己的过失。他们评议了椭圆函数论的研



他那睁大的眼睛还噙着泪水盯着前方

究。第二年把当时数学界最高荣誉——法国科学院大奖，授予阿贝尔和雅可比，并且把后者选为他们的院士。

1500 法郎奖金送到安娜妈妈的手中，又引起一阵痛苦的思念。正义来得太迟了。尼尔斯·阿贝尔在他短促的一生中，一直被贫穷和疾病所困扰，却在代数方程论、椭圆函数论和无穷级数等领域作出第一流的贡献。可是他去世的时候，连个大学的正式教职都没有。社会的正义在哪儿呢？



伽罗瓦

(1811—1832)

伽罗瓦的概念……后来在整个数学发展上产生了愈来愈大的深刻的影响。

——海尔曼·外尔

湖畔枪声



初夏的黎明，野外的空气带着凉意，显得特别清新。随着东方天际鱼肚白的伸展、大地渐渐苏醒过来。一声，两声，鸟儿动听的歌唱，一会儿成了叽叽喳喳的喧闹。树林的寂静打破了；林子也慢慢现出它的绿色。湖面上升起一阵薄雾，烘托着远处袅袅炊烟。捉摸不定的玫瑰色的朝霞，难以察觉的慢悠悠的晨风，孕育着更热烈更紧张的生命乐曲。

砰！从巴黎郊区格拉塞尔湖畔传来一声枪响，惊起了一群飞鸟。并没有看见鸟儿跌落，一个年轻人却倒下了。

他是谁？他就是我们故事的主人公，数学家们誉为群论的“真正先锋”，“近世代数的创始者”，引起后人许多赞叹与感慨的数学家埃瓦里斯特·伽罗瓦。

这位19世纪30年代初巴黎有名的共和主义分子，在一次可悲的决斗中被打倒了。

从莱茵堡到路易皇家学校

1811年10月26日，伽罗瓦诞生在距巴黎18公里的莱茵堡。人们在莱茵堡看到的小伽罗瓦并不是神童，而是个对事认真得近乎严肃并且重感情的孩子。父母双方家族都没有数学才能的记录，共和主义影响倒是有过。父亲尼可拉·卡贝里·伽罗瓦，是位向往18世纪大革命、憎恶专制的自由主义知识分子。他负责一所有60多名寄宿生的学校。1815年3月到6月拿破仑卷土重来的“百日”中，他被拥护共和的居民推选为镇长。拿破仑彻底垮台以后，他保留了镇长职务以应付复辟的波旁王朝，继续支持老百姓反对天主教僧侣代表的封建势力。

12岁以前小伽罗瓦没有上学。妈妈玛丽·阿德莱达·德芒特就是老师。她从做法官的她的父亲那里接受了法学世家严格的古典教育。她把这种古典教育结合英勇的男性斯多葛精神[①]来教育小伽罗瓦。她不守旧，爱自由。在某些人眼里，她显得任性，固执，甚至有点古怪。

1823年10月，12岁的伽罗瓦考入巴黎路易皇家学校，插班读四年级。小伽罗瓦的古典语文和算术都训练有素，成绩比那些大孩子还好。刚进校的时候他有点怯生。没想到后来连续三年被评为优等生，希腊语作文大赛中他还获得好评。但是伽罗瓦对这些奖励的兴趣愈来愈淡薄。他渐渐看出来，学校领导骨子里要把学生培养成波旁王朝的顺民。对不大听话的同学，你看他们惩罚多凶狠：校长拉波利一次就开除了40名学生。这些孩子不过是没有遵照他的指示到教堂去唱赞美诗罢了。目睹这些同学遭到专制的迫害，伽罗瓦幼小的心灵感到难以承受的压抑。从前，“专制”对他纯粹是个抽象

---

① 斯多葛派是公元前4世纪创于雅典的哲学学派，主张禁欲苦行，坚忍恬淡。

的字眼；现在他看到，这是一种可憎的现实。他不再信服宣扬温顺和谦恭的说教。冗长的修辞学练习使他厌烦，拉丁语和希腊语他觉得是沉重的负担。他的学习成绩明显下降。操行评语由“很有礼貌，十分天真，有许多优点”，“才干杰出”，“举止不凡”，变为“脾气古怪”，“为人乖僻”，“过分饶舌”。拉波利看了小伽罗瓦的材料，认为他的判断力不成熟，要他重修二年级①。

得悉校长的决定，伽罗瓦的恼火可想而知。不过“塞翁失马，焉知非福”。1827 年初，伽罗瓦利用重修二年级的机会，到初等数学班听数学的补充课程。这是为爱好精密科学②的学生开设的。

小伽罗瓦在数学学习中找到了温暖和补偿。

迷上了数学

在代数课上，伽罗瓦学到二次方程求根公式，非常兴奋，因为这是普遍有用的。他十分欣喜地读到勒让德的《几何基础》。这本标准的初等几何教程以后人更易接受的形式重现了欧几里得《原本》，从 1794 年到 1881 年共发行了 15 版。它向伽罗瓦晶莹剔透地展示了欧几里得几何结构，表现了数学推理的严密美妙。伽罗瓦一连好几天都沉浸在这本书的阅读和思考中。到底是大师的著作，不同凡响。法兰西的“三 L”，祖国的骄傲啊！

几何学习进一步培养了伽罗瓦归纳、抽象的能力和联想、类比的习惯。在初等数学班他急切去学习三次方程和四次方程的解法。他很快领悟了意大利人的诀窍而提高了自信心。他明白这些解法有些代数变换的技巧，但是并没有高不可攀之处。他对人们为了这些公式竟花了上千年的时间感到费解。他决定试着去寻求前人还没有找到的五次方程求根公式。

---

① 法国学校标号越小年级越高，一年级为毕业班。

② 精密科学是过去习惯上对使用数学物理定量研究考察对象的学科的一种泛称。

一连几天，伽罗瓦紧张地思索，认真地演算。他终于得出了结果。繁是繁些，五次方程的根式解不是求出来了嘛！但是，经过短暂的兴奋以后他冷静下来，很快发现了自己的错误。这就像莱布尼兹的好友奇尔恩豪斯一样，自以为找到了五次方程一般解法，实际上在推理中发生了差误。更相似的是阿贝尔，他在做学生时一度也认为求得了五次方程的一般解，其实也是搞错了。

伽罗瓦现在看清楚，这个问题确实很难。但是他没有泄气，决心研究下去。这时候他已经很难接受学校的讲课方式，那些教学内容对他的研究也没有多大帮助。伽罗瓦决定直接向大师们请教，着迷地读起欧拉，拉格朗日、高斯等人的代数和分析的著作。其他的一切他都不在意了。一位教师形容伽罗瓦说：“他被数学的鬼魅迷住了心窍。”他进入了真正的数学研究境界。

拉格朗日的方程论著作，使伽罗瓦受到很大启发。首先，拉格朗日通过对低次方程统一解法的分析指出，方程的求解和根的置换相关联。进一步，拉格朗日说明，低次方程的解法对五次以上方程无效。从而他预言“用根式解高于四次的方程是不可解决的问题之一。”

啊！原来五次以上方程也许不可能用根式解，那就是说，不能通过对方程的系数施行加减乘除及开方这些代数运算求出根来。再一查，高斯在 1801 年也曾经声言，这个问题也许是不可解的。伽罗瓦懂得，拉格朗日和高斯不是随便猜测的。拉格朗日正是在指出“虽然关于求解的不可能性什么也没有证明”的同时作出不可能性预言的，这表明他的郑重和实事求是的态度。伽罗瓦看到，他的使命将不再是寻求高次方程的一般解法，而是证明五次以上方程一般代数求解的不可能性。怎样着手证明？拉格朗日说，置换理论是“整个问题的真谛”。对五次以上方程，根的置换内涵什么规律决定它们一般不能用根式解？这个问题显然新奇而又艰难。但是，伽罗瓦感到他的心和大师们是相通的。他怀着终将成功的信念，继续钻

研这个被拉格朗日称为“向人类智慧的挑战”的代数方程根式解的问题。

伽罗瓦心思集中到数学研究上，学校里的功课荒废了；连数学考试成绩也很平常。他忽视了维尼尔老师的意见，没有按部就班学好基础课程。这对他投考巴黎综合工科学校非常不利。他很想进入这所名闻全欧洲的学府，和教授们共同研讨那些艰深的数学课题。但是他没有认真准备就去应试，结果在综合工科学校严格的考试面前失败了。

法兰西的阿贝尔

伽罗瓦没有因为1828年报考巴黎综合工科学校落榜而灰心。许多老师和同学都了解伽罗瓦的数学才能。这年10月，他被编入数学专业班。这是路易皇家学校精华所在。伽罗瓦决定吸取教训，注意基础。这时候他遇上一位高水平而又了解他数学才能的带路人，这就是优秀的高等数学教员里夏尔老师。

1821年，里夏尔26岁的时候，就被授予数学教授职称。路易皇家学校在数学史上出现的两大明星，伽罗瓦和埃尔米特，以及预测出海王星的著名天文学家勒威耶，都曾经得益于他。里夏尔不搞教书匠呆板的一套。他讲课生动活泼，优美雅致，引人入胜。他在课余参加著名的索邦高等几何讲座。这不是分心旁骛，而是为了使他自己既能和当代数学家们一道前进，也能在更高的水平上指导学生。他认真研究数学教育的规律，既注意培养学生热爱科学的精神，把握住研究的大方向，又善于用具体问题锻炼学生，提高他们的研究能力。这位谦恭自处的教师，把他卓越的才能都献给了他的学生。许多他教过的综合工科学校的学生都衷心感谢里夏尔老师，学习他的为人和他优美独特的教育风格。

一道难题，教室安静了。大家还在聚精会神地思考，伽罗瓦却



从容不迫地站起来。简单两三句，说出他有独创性的解答。许多同学还迷惑不解，里夏尔老师却意识到，他遇到了一位天才，“法兰西的阿贝尔!”

进一步了解伽罗瓦的学习研究以后，里夏尔老师十分欣喜。他表扬了伽罗瓦，并且声明：这个学生应该免试进入综合工科学校。他给了伽罗瓦一等奖学金，并且在他的学期报告中写道：“这个学生有个值得注意的、远远超越他所有的同学的优点，他特别适宜在数学最艰深的前沿研究。”但是学校领导和一些教师对伽罗瓦不满意。他们批评他“好抬杠”，“脱离了全体同学”。有的教师公然讽刺挖苦他。一位修辞学教师声称：“他的聪明才智现在还是我们不能相信的传奇。”而事实上，伽罗瓦在学习拉格朗日著作的时候已经有所发现。他证明了关于连分数的一条定理，发展了拉格朗日的研究成果。一个 17 岁的中学生，能把大数学家的工作向前推进，师长看了多高兴！里夏尔老师把伽罗瓦的文稿介绍给《纯粹与应用数学年鉴》。这是法国数学家热尔贡 1818 年创办的法国第一个专业性数学杂志。1829 年 3 月 1 日，伽罗瓦关于连分数的论文在《年鉴》上发表了。这表明，伽罗瓦已经不只是一个普通的中学生，还是一个有创造才能的青年数学家。文章发表对伽罗瓦是个鼓励，更大的动力来自学习研究本身。对方程根的置换深入研究，使伽罗瓦日益了解根的置换和代数求解之间深刻的联系。现实生活中的虚伪偏见和专制压迫使他憎恶愤恨，只有数学研究里的探索发现使他感奋欢愉。

明珠暗投

从 1829 年春天到 1831 年春天这两年中，伽罗瓦把前人特殊的高超技巧放在一边，摒弃推理中的盲目性，他深入考察根式求解方程各种运算步骤的实质，也就是他自己所说的“我在这里进行分析之分析”。“新颖的问题需要使用新名称、新符号。”在问题实质的

分析中，伽罗瓦提出了置换群①及其子群、数域及其扩域等一系列新概念。伽罗瓦把对方程的系数施行四则运算产生的数域的各个层次的扩域和根的置换群的各个层次的子群联系起来，建立了后人所谓的“伽罗瓦对应”；通过群的研究来了解域的构造，从而解决方程可不可以用根式解的问题。所谓方程不可用根式解，就是方程的根不在对系数施行代数运算产生的数域中。我们打个不大确切的比喻，来说明伽罗瓦对应的意义。如果把数域比做实物，那么伽罗瓦对应就是 X 光摄影洗印装置，它使实物和它们的 X 光照片对应起来。这里 X 光照片就是和数域对应的群。如同通过 X 光照片可以分析实物的构造一样，可以通过对群的研究来了解数域的构造。引入更复杂的概念，进行更深入的分析之后，伽罗瓦不但证明了一般高于四次的代数方程不可能用根式解，而且得到了任意一个代数方程可不可以用根式解的判定的准则。彻底解决了这个“向人类智慧挑战”的代数方程根式解的问题。由于几何上尺规作图问题和代数方程根式解相联系，因此利用伽罗华理论不难证明：用尺规三等分任意角和由已知正方体的棱，作出体积为其 2 倍的正方体，都是不可能的。

---

① 群是反映对称的数学概念。群表明一个体系的结构，从而可以对一些事物的存在与否，特征如何，给出解答。伽罗瓦探讨可用根式求解的方程的特性问题的时候，用了根的置换式排列的概念。例如，设 x_1、x_2、x_3、x_4 是一个四次方程的四个根，则在包含这些 x_i 的任何表达式中交换 x_1 和 x_2 就是一个置换，可用$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$来表示。又如同时交换 x_1 和 x_3、x_2 和 x_4，又是一个置换，可用$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$来表示。如实行第一个置换后再进行第二个置换，则等价于实行如下的第三个置换：$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$。因为，例如由第一个置换，$x_1$ 换成 x_2，由第二个置换，x_2 又换成 x_4，结果 x_1 就换成 x_4，这正是第三个置换；其余类推。我们就说头两个置换按上述顺序作成的“乘积”就是第三个置换。这里总共有 4! 可能的置换。因为置换集合中任何两个置换的乘积仍是原集合的成员，所以置换的集合就说是形成一个群。学过复数的读者知道，1 的 6 个六次方根在复平面上相应的 6 点，对称地分布在以原点为中心的单位圆上。这 6 个 1 的六次方根全体对复数乘法就构成了一个群。一般，1 的 n 个 n 次方根对复数乘法也构成群，我们称为单位根群。

揭开方程根式解的谜底、奠定近世代数的基础的这两年中，伽罗瓦经历了许多不幸的遭遇，那真是充满痛苦和激奋的岁月。

1829年5月，伽罗瓦按里夏尔老师的建议，把他的初步成果写成一个简要的报告呈送法国科学院审核。据传6月初科学院例会委托柯西和一位法国力学家普恩索两位院士评审伽罗瓦的研究报告。伽罗瓦期待着柯西对他研究的肯定，焦急地等了一个多月，结果杳无音讯。他顾不得继续打听消息。中学毕业了，他要准备最后一次争取进入综合工科学校的考试。考期就在7月中旬。

7月2日，正当伽罗瓦紧张准备应试的时候，父亲因为不堪一个天主教牧师造谣中伤带来的沉重的精神压力，精神失常，自杀身亡。父亲的惨死，使伽罗瓦悲愤异常。他不止一次地对朋友说过："父亲就是我的一切。"可是，面临事关重大的考试，他不得不抑制着内心的悲痛。

那时法国学校的主考官员是常任的。他们也是教材和试题汇编的撰写人，对应试的考生有无比的权威。看到主考官比内和弗尔绥那样傲慢的态度，伽罗瓦不大愉快。联系到试题中方程求解，伽罗瓦自然提及他自己关于方程根式解的研究。不料主考官对这样重大的问题毫不理会，目光中流露出怀疑和轻蔑。这使伽罗瓦更为不快。他不想多说了，主考官却又提出问题。伽罗瓦认为这种问题实在意思不大，是主考官编造出来刁难考生的。第一个问题还没有好好回答，第二个第三个又来了。伽罗瓦索性不理会，等待着就严肃一些的问题发表自己的意见。主考官大概觉得这个"好高骛远"的考生被他们考住了，得意地笑起来。伽罗瓦预感到进入综合工科学校无望。他忍受不了这种不公正的待遇，抓起黑板擦，朝主考官扔去。

里夏尔老师、维尼尔老师和同学们都为伽罗瓦再次落榜感到惊讶和不平。伽罗瓦痛定思痛，对波旁王朝封建复辟势力产生了深深的憎恶。

父亲去世对他不仅产生感情上的创伤，也造成经济上的困难。收入锐减，母亲还要抚养未成年的弟弟阿尔弗莱德。伽罗瓦决定按

照里夏尔老师的意见，报考巴黎高等师范学校科学系。1829 年 10 月 25 日，伽罗瓦被录取为高师预备生，翌年 2 月签字同意为国家服务 6 年，转为正式生。按照传统，师范院校学生享受公费待遇，伽罗瓦的生活费用总算有了着落。

数学史上有名的巴黎高等师范学校这时候的水平还相当低。伽罗瓦的数学才能得不到那些暮气沉沉的教授们的赏识。严格的政治控制比起路易皇家学校，有过之而无不及。沉寂的宗教生活更使伽罗瓦感到压抑。

可能认为伽罗瓦的研究和阿贝尔雷同，柯西对伽罗瓦的报告没有明确的肯定；或许他认为 1815 年他本人对置换群也有所研究，不愿意推崇它。他虽然有过就伽罗瓦报告召开意见听取会的动议，但是会没有开成就不了了之了。柯西作为当时法国数学界领袖，通常是个鼓舞者和权威的鉴定人。糟糕的是在最重要的时刻他却疏忽了。前不久他冷落了阿贝尔，现在又怠慢了伽罗瓦。这两位极有才华的青年，没有得到他应有的扶掖，使数学发展蒙受了本来可以避免的重大损失。1829 年 9 月，柯西因拒绝宣誓效忠菲力普流亡国外。离开巴黎以前他留下意见，让伽罗瓦写个详尽的研究报告参加科学院大奖赛。消息传来，伽罗瓦决定以他关于代数方程根式解的全部研究，去争取法国科学院的大奖。这种大奖正是为了解决方程根式解这类难题而设立的。通常只有当代第一流数学家才敢于竞争这种最高级别的奖赏。英国最高荣誉的嘉德勋章的绶带是蓝色的。数学家们就把大奖称为蓝绶带奖。通过进一步分析整理，伽罗瓦看清楚他的成果的确是“许多学者望而却步的研究”，解决了困扰着数学家们几百年的大难题。他相信只要评审者认真阅读，了解到它的意义，他是完全可以获奖的。一旦他的研究得到科学院的承认，他的工作环境就可以大大改善了。

1830 年 1 月，伽罗瓦把他仔细写成的一份研究报告再次呈送法国科学院。报告确实被送到了秘书处，交傅里叶院士审定。这位敢于否定欧拉和拉格朗日的意见、断言任意函数可以展开为三角级数、

在研究热现象中建立“傅里叶分析”而名标青史的数学家，也没有积极研究伽罗瓦的报告。他把稿子带回家，放了几个月。同年5月16日，他因心脏病去世。后来稿子竟不知去向。伽罗瓦被轻率地从竞赛中排除了。1830年的大奖颁给了雅可比和已经故去的阿贝尔。到年底，科学院才把手稿遗失的消息通知伽罗瓦，并请他再写一份研究的概述。他再一次被深深激怒了。对于雅可比和阿贝尔获奖，伽罗瓦没有丝毫不快。特别对于他研究上的先行者阿贝尔，伽罗瓦和他精神上息息相通，由衷敬佩。他很惋惜没有能和这位志同道合的朋友切磋交流。伽罗瓦把阿贝尔年纪轻轻死于贫病的不幸和他自己再三受到极不公正的待遇联系在一起，都归咎于社会的腐败。他愤怒地谴责道：“由于对庸人的崇拜、谄媚，总要抛弃公正的原则，天才就要被冷酷的社会埋没掉。”

伽罗瓦预料到他可能再度被法国科学院冷落，对1830年1月的报告作了详细摘要。这份摘要被送到费吕萨克男爵的《数学科学通报》杂志社。在1830年4月号《通报》上以《关于解代数方程研究报告分析》为题发表。在《通报》6月号上又发表了他关于解数值方程的短篇注记《数的理论》。后来，在1830年-1831年的《纯粹与应用数学年鉴》上还刊登了伽罗瓦在分析方面若干问题的笔记。连同以前在《年鉴》上发表的关于循环连分数的定理，伽罗瓦已经发表了4篇数学著作。这些都没引起当时数学界领导和教育部门负责人的重视。伽罗瓦的环境没有得到丝毫的改善。这些不公正的待遇使伽罗瓦对整个旧社会产生了深刻的憎恨。他在高等师范学校结识的惟一亲近的朋友，奥古斯特·薛瓦烈，是位圣西门[①]主义者。伽罗瓦虽然没有信奉圣西门主义，但是在薛瓦烈的影响下，伽罗瓦开始更经常、更深入地思考社会问题，对法国社会的政治、文化，包括教育、科学各方面，根据自己的经验，进行分析和批判。

① 圣西门（1760-1825）是法国著名空想社会主义者。

在革命急流中

1829年，查理十世任命大革命中逃亡贵族的首领、极端保皇派波林亚克公爵组阁。这引起广大人民抗议。1830年，资产阶级自由派也在议会提出罢免波林亚克内阁的要求。查理十世非但不答应，反而在5月下令解散议会，到7月他更发出反动的敕令，解散新成立的议会，改变选举法和出版法，剥夺人民选举权和言论出版的自由。反动的7月敕令发出以后，全国一片抗议声。形势愈演愈烈，起义的战斗终于在巴黎打响了。

七月革命爆发使伽罗瓦很兴奋。他想和同学们一道去参加斗争。许多学校的学生都走上街头。但是只有高等师范学校的校长吉尼奥不让学生出去。他要他的学生起誓留在校园里。伽罗瓦拒绝起誓，并且试图在夜晚逃出去，可惜院墙太高没有成功。

1830年7月29日，起义军攻占土伊勒里宫，查理十世逃亡英国。以资产阶级自由派为主体的临时政府害怕群众，害怕壮大起来的无产阶级，不想再建共和政体，而忙着搞君主立宪。于是，接近这些大资产阶级的奥尔良公爵——路易-菲力普便被推上王位，建立起所谓“七月王朝”。共和派奋起反对这种历史倒退。伽罗瓦积极参加共和派的斗争，在假期仍然四处活动，宣传民权思想，其热烈的程度使亲友们感到意外。如后来著名小说家、民友社中央理事大仲马所说，伽罗瓦成了一名激进的共和主义分子。在这期间他结识了布朗基、拉斯拜等著名共和主义者。不久，伽罗瓦加入共和派组织民友社，同时报名参加共和派占主导地位的国民自卫军炮兵队。伽罗瓦的思想言行自然和七月革命前站在查理十世一边、七月革命后又依附自由派临时政府的高等师范学校校长吉尼奥相对立。

12月5日，《学校公报》发表文章指责吉尼奥，在文章末了援引一封署名“高等师范学校一学生”的信，尖锐地揭露吉尼奥在七月革命过程中的机会主义立场。这当然是校长大人不能容忍的。他

几乎不假思索，就认定写信的学生就是那个可恶的伽罗瓦。开除伽罗瓦是他“曾经20次想做而未做的事”。没有任何调查研究，不等国民教育委员会批准，吉尼奥就宣布开除伽罗瓦，并把他遣送回家。接着吉尼奥赶紧上书教育大臣，宣称伽罗瓦“无可救药了”；并且为他自己“擅自决定”“深感遗憾”；还表白他个人对伽罗瓦的宽容：他“器重他的不容置疑的数学天才”，“容忍他的反复无常的行为，容忍他的懒散和不能容人的性格”。开除伽罗瓦似乎是违反他的心愿而迫不得已的事。

虽然就在12月12日，《宪法报》指出：“我们认为有责任提请国民教育大臣阁下注意一项滥用职权的事例，高等师范学校一个最有才华的学生竟成了滥用职权的牺牲品”。1831年1月8日，国民教育委员会还是批准了开除伽罗瓦的决定。伽罗瓦再次失掉深造机会。愚昧专制又一次践踏科学民主！

面对官场权贵吉尼奥，伽罗瓦没有放弃斗争。1830年12月30日，他在《学校公报》发表致高等师范学校同学的公开信，向他们呼吁：“你们要凭你们的良心和人格说话。”在反动当局高压下，伽罗瓦的呼吁没有得到响应。

为了克服经济上的困难，伽罗瓦决定以讲授自己的数学研究换取生活费用。他在《学校公报》刊登私人授课的声明。第一次讲座有30名听众。他要斗争下去，他还有更重要的事要做。

著名数学家、力学家泊松（1781-1840）院士了解到科学院对伽罗瓦两次研究报告都处理不当，建议伽罗瓦再写个报告给他审查。虽然前两次明珠暗投的遭遇记忆犹新，几乎走投无路的伽罗瓦当然不愿放过这个机会。他清理了他以前的研究成果，认真写了一篇题为《关于根式解方程的可解性条件》的论文。这是他关于代数方程根式解研究惟一写完了的一篇文章。1831年1月12日，伽罗瓦第三次把他的研究报告呈送科学院。伽罗瓦在前言中要求评审者起码要仔细读完他的文章。1月17日，科学院例会委托泊松和拉克鲁阿两位院士审查伽罗瓦的报告。伽罗瓦得悉他们的安排以后，仍然很

不放心。3 月 31 日，他写信给法国科学院院长，希望评审委员会不要像前两次那样，因为问题很难，“就预先决定，我对这个问题无能为力。”并且问道：“我的手稿是不是将会再次遗失？”不知院士们看了是内疚，是同情，还是反感。事实是泊松仍旧没有理解伽罗瓦的思想。他认为伽罗瓦研究的部分结果不过是阿贝尔所已经得到的，这些结论在阿贝尔死以后不久就发表了；而其余部分则是“不能理解”。7 月 11 日，科学院例会上宣读了泊松对伽罗瓦研究的评审报告。泊松实质上否定了伽罗瓦的研究；不过他还是建议伽罗瓦再写个更详尽的报告。殊不知这时候伽罗瓦即将第二次被捕入狱，难以得到他的关照了。

伽罗瓦第一次被捕是在 1831 年 5 月 10 日。头天晚上，他到郊区坦布尔的“布尔根饭店”，参加民友社为庆祝一次斗争胜利举行的盛大宴会。200 多位来宾中有大仲马、拉斯拜等名流。这时期的伽罗瓦在“推翻王政、实行共和”思想鼓舞下，决心献身革命。他曾激昂慷慨地宣布：“如果需要一个尸体去唤醒人民，我愿意献出自己。”可是为了避免反动当局寻找镇压的口实，宴会组织者们约定不发表政治演说，克制的祝酒词是事先准备好的。这使充满激情的青年炮手们感到不快。宴会快结束的时候，伽罗瓦站起来，抽出定做的匕首，举起满满一杯酒。他不像以前祝酒的人那样高呼“共和国万岁！”之类革命口号，却提议：“为路易-菲力普干杯！”同时短促而有力地挥动一下匕首，以表示自己对会议组织者在政府高压政策下的懦弱表现的不满。当他重复第二遍的时候。周围会意的青年人都欢呼起来；纷纷拥向他们的英雄。远处只听见“为菲力普干杯”的人则呼啸抗议。宴会在一片混乱中结束。炮手们并不就此罢休，他们走上街头，唱歌跳舞，闹了一夜。反动统治者不会容忍“聚众闹事”，他们的鹰犬也不会放过“出头鸟”。第二天，伽罗瓦在家中被捕。他被关进圣彼拉吉监狱。

6 月 15 日，伽罗瓦以教唆谋害法兰西国王未遂罪被审。在塞纳省陪审法庭上，19 岁的伽罗瓦镇静自若，对答如流。最后他更精神



振奋，豪迈地宣称:“我们精力充沛，勇往直前。共和主义者的灵魂是污泥沾染不了的!”窦本律师仗义执言，据理力争。他通常都是为共和党人作辩护。通情达理的南丁庭长终于宣判伽罗瓦无罪释放。

不到一个月，攻占巴士底狱大革命纪念日就要来临了。共和党人积极筹备7月14日共和国国庆节游行集会。政府则在7月11日通过逮捕共和党领导人的决议。得到警告，伽罗瓦离开家躲过了节日前夕的搜捕。但是在7月14日率领群众示威的时候，警察把他和另一个领头人杜沙特列从游行队伍中抓走了。当晚他们由拘留所移到圣彼拉吉监狱。第二天在报上披露的被捕者名单中有“年轻的伽罗瓦”。

在狱中伽罗瓦得知他的数学研究在科学院7月11日的例会上仍旧没有得到肯定。但是这已经是许多次打击以后又一次打击，他不像当初那样沮丧失望。他看出这帮老院士们水平其实有限。他觉得应当就自己的研究写出著作，直接公布于世，来推动数学发展才是。他动手为他的著作写序言。他兴奋而激动，一下子写成了好几千字的文章。

反动当局拖了3个多月，绕过可能宣判无罪的陪审法院，于10月23日才开庭审讯伽罗瓦和杜沙特列，并且以非法穿着军服和携带武器有罪为名，分别判处伽罗瓦和杜沙特列9个月和3个月徒刑。重判伽罗瓦是发人深思的。伽罗瓦不服上诉。巴黎法院12月3日最后判决，仍维持原判。想到自己许多次特别不幸的遭遇，面对黑暗沉闷的监狱生活，忧郁绝望沉重地压迫着柔弱年少的伽罗瓦。快活开朗的浪漫主义作家德莱瓦尔和他关在同一个房间。他们面对面席地而坐，开怀痛饮。喝吧，一瓶酒一口气把它喝下去！这是什么样的生活，什么样的社会啊！德莱瓦尔运气好，关了几天就释放了。伽罗瓦热烈地和他吻别，答应获释以后去拜访他。作家后来在自己的书中深情地记叙了这次诀别。

1832年春天时疫流行，伽罗瓦也病了。当局觉得把这个“重要的政治犯”听任疾病处理未免轻率。3月16日把他转移到努尔申街

一家由警察局监督的医院。在这里伽罗瓦的身体和精神都有好转。他后来写了一篇论述科学研究的文章。和上一年9月写的文章相似，文中提出的一些深刻见解，完全不像是通常20岁青年的手笔。

4月29日，伽罗瓦刑满获释。但是他没有立即离开医院。在兼作情报工作的院长法尔特里埃家中，伽罗瓦和院长女儿斯特芬妮邂逅，造成他仅有的一次恋爱。后来，他发现这女孩不过是卖弄风情。5月25日伽罗瓦给他的挚友奥古斯特·薛瓦烈的信中，倾诉自己的痛苦：

“你的信充满了天使圣徒般的抚慰，给我带来了一点宁静。但是怎能消除我的遭遇在我脑海里产生的那样激动、那样狂暴的情景？……如醉如痴！我对任何事业的幻想都破灭了，甚至爱情和荣誉。”

但是，这时候伽罗瓦并没有完全绝望。他还答应6月1日去看薛瓦烈，计划下乡休息和反省。后来杜沙特列不期而至，为斯特芬妮，要求同伽罗瓦决斗。这真使伽罗瓦陷入绝境。伽罗瓦认为他们为那女子而死太不值得，尽量避免决斗。以追求真理为人生第一要义的伽罗瓦信奉诚实的力量，实事求是地说明一切。但是最终也没有被年轻的对手理解，被迫接受了被鬼迷了心窍的杜沙特列的挑战。

最后一夜

5月29日，决斗的前夕。预感到自己难免一死，伽罗瓦痛苦地回忆起自己短促的一生所遭遇到的种种不幸。他深深后悔自己放松了生活中应有的警惕，憎恶那些人间败类的自私贪婪和凶残愚蠢。

到晚上，伽罗瓦想起他心爱的数学。数学研究中的追求和探索，发现和创造，使他饱受创伤的心灵，领受到无与伦比的甘美，而得到滋润和抚慰。这是生命真实而持久的意义。他了解自己的数学发现的价值，必须赶紧总结一下，以免失传。他那思想丰富的头脑，有好些发现，是要些时间才能写出来的。

一工作，他又兴奋起来。他争分夺秒地写起他的科学遗言。他

一面紧张地思考，一面急速地书写。鹅翎笔在纸上沙沙作响。

一段写完，总要想想下段内容。可怎么能停顿呢？

“我没有时间了，我没有时间了！”他焦急地催促着自己，手也急不可待地写下了他的独白。然后，又狂乱地涂写出下一段的大纲。于是，在后人看到的，思想缜密、推理严谨然而书写潦草的文稿中，空白处多次夹杂着表明作者焦急不安的独白短句。

几乎整整一夜功夫，在破晓以前那段短促的时刻，他写出了使以后好几代的数学家都为之赞叹不已、好几百年的数学发展都将蒙受它的影响的杰作！

他的一生中除了数学上的成就，尽是些痛苦失意的事了。伽罗瓦把他心灵上仅有的这点珍藏，委托给他最忠实的朋友薛瓦烈，贡献给人类。

他给薛瓦烈写道：

“我亲爱的朋友！

“我在分析上有了某种新发现。……不管泊松说了些什么话，我坚信它是正确的。……

“我亲爱的奥古斯特，你知道我不只是研究这些问题。……可是我没有时间，而我对这个辽阔领域的认识还不大清楚。”

他最后写道：

“请你公开向雅可比和高斯请教，并请他们就这些想法的重要性，而不是正确性，发表他们的意见。

“我希望，这样将来总会有人认识到，从这种杂乱无章的情况整理出秩序来，对他们是大有好处的。”

写完有关心爱的数学的文章，天将破晓。伽罗瓦要最后面对丑恶的现实，他又心烦意乱起来。他提笔又写了一封致全体共和派的信：

“我请求我的爱国朋友们，不要责备我不是为祖国献出生命。

“我将作为一个下流的卖俏女人的牺牲品死去。我的生命的火花，要在一阵可悲的喧嚷中熄灭了。

“啊！为什么要为这样无聊的事情死去，为这样可鄙的事情死去！

“苍天作证，我已尽力试图拒绝这场决斗，只是迫不得已才接受挑战。我后悔对这些不能冷静地倾听真情的人说了招致不幸的实话。但我终究说了真话，我将带着不受谎言和爱国者的血所沾染的良心进入坟墓。

“永别了！我已经为公众的幸福献出了自己大部分生命。

“不要责怪杀死我的人。他们是讲信用的。……”

末了，他觉得还有话说，又写了“致 N. L. 和 V. D. 的信：”

“亲爱的朋友们！

“有两个爱国者约我决斗，……我无法拒绝。

“请原谅我没有通知你们之中任何一人。

“我的对手们要我保证预先不通知任何一位爱国者。

“你们的任务很简单：你们应当证实，我是违背自己意愿参加决斗的，就是说，用尽一切办法想和平了结而后才决斗的；你们还应当证实，我对无聊的事，甚至像上述的无聊的事也不善于撒谎。

“不要忘了我！因为命运不让我活到祖国知道我的名字的时候。

“我至死还是你们的朋友。”

伽罗瓦写完悲壮的绝笔，已经是 5 月 30 日的凌晨。他匆匆收拾了一下，奔赴冈提勒。

黎明时光，伽罗瓦到达格拉塞尔湖畔的时候，对手们已经等在那里。

没说什么，一切按事先约定，用俄国轮盘赌方式进行决斗。

面对乌黑的枪口，伽罗瓦并不畏惧。但是这小伙子整夜紧张地工作，还憧憬着美丽的数学理想。现在，他毕竟感到疲倦了。他还没有来得及对准目标，对方的枪响了。

子弹打中了伽罗瓦的腹部。他后退了一步，又站住了。过了一两秒钟，他突然向前扑倒下去。

对方的人走过来。伽罗瓦听不清他们说了几句什么。他们又走开了。脚步声消失在远处，伽罗瓦失去了知觉。

疼痛使他苏醒过来。太阳已经高高升起。大自然依然美丽而充



面对乌黑的枪口，伽罗瓦并不畏惧

满生气。只是伤口疼痛，四肢无力。

“善良的庄稼汉，你来救我吗？不用了，生命就要完结了！”

在科申医院，创伤引起的腹膜炎发作以前，伽罗瓦很清醒。他知道自己快要死了。可不是吗，看，教士来了。埃瓦里斯特想起了爸爸。陌生的教士，你走开吧！伽罗瓦拒绝他为自己祈祷。垂危的

青年，想见的是亲人：母亲和弟弟。终于，弟弟阿尔弗莱德哭着进来了。伽罗瓦睁开眼，看见比他还年轻的孩子伤心流泪，他想安慰弟弟，若无其事一样，淡淡地说了声：

"别哭。"他停顿了一下，又说：

"别哭，我需要我全部的勇气，在20岁的年纪去死。"

第二天，1832年5月的最后一天，黎明的野外依然是那样美。只是太阳升起得更早一点，鸟儿唱得更欢一些。树上的枝叶更茁壮，更青葱。绚丽的朝霞慢慢地隐去了，悠然的晨风却渐渐吹拂开来。大地上生命的乐曲更热烈更紧张地奏鸣起来。

在科申医院的病房里，伽罗瓦的脉搏愈来愈微弱。在这万物欣欣向荣蓬勃生长的早晨，一个年轻的生命却悄然逝去了。

巨大反响

伽罗瓦被害在巴黎群众特别是共和派中引起很大悲愤。6月2日安葬的时候，除了民友社代表团以外，还有大学生、炮兵部队的战士和许多生前好友前来送葬。先后有四个人致悼词，表达了广大群众深切的悲痛。伽罗瓦的夭折，震动了社会，报纸上出现"一场不幸的决斗从科学界夺走了一位前途极其灿烂的青年"的大字标题；可是没有人来认真了解伽罗瓦的数学贡献，更不用说追究对他的迫害。阿尔弗莱德把哥哥的数学遗稿交给薛瓦烈。薛瓦烈找不到人愿意出版这些未经权威们认可的著作。《百科全书派评论》没有刊登伽罗瓦的"科学遗言"，虽然这是他生前的请求；到9月它才发表薛瓦烈悼念亡友的一篇文章。里夏尔老师知道伽罗瓦工作的意义，一直珍藏着他的数学手稿，后来由埃尔米特转交科学院图书馆保存。

伽罗瓦的数学著作直到1846年，也就是他逝世以后14年，才由刘维尔（1809-1882），发表在他1836年所创办的《纯粹与应用数学杂志》（即《刘维尔杂志》）上。刘维尔，这位19世纪卓越的数学家，在函数论、微分方程、数论以及统计力学诸方面都有重要建

树。他认真阅读了伽罗瓦的著作，作了充分的肯定。他在编辑引言中批评了柯西等人的失职。接着他分析道：

“过分追求简洁是这桩憾事发生的原因。当论述纯粹代数抽象而难懂的问题时，我们首先要避免这种缺点。确实，当我们试图带领读者从刚开辟的小路向更广阔的领域前进时，清晰是最必需的。正如笛卡儿所说：‘异常抽象的问题，必须讨论得异常清楚。’伽罗瓦总是忽视了这句格言。……

“但是，现在情况不同，伽罗瓦去世了！我们别沉湎于无用的批评。让我们来看看功绩。”

往下刘维尔说明他如何研究手稿，并捡出一件完美无瑕的珍品而大加赞扬。

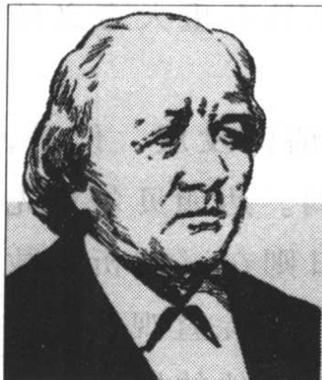
“我的热忱得到了很好的报偿。当我看到伽罗瓦的证明完全正确，而一些细小的缺陷也都被我填补好时，我体验到一种真正的快乐。”

伽罗瓦置换群理论的发表，产生了研究具体群的理论。后来约当[①]等人发展群论，特别是索福斯·李[②]建立李群理论，是伽罗瓦研究的继续。100 多年数学发展表明，犹如拓扑学使几何学，群论使代数学发生了根本的变化。它们对整个数学和科学技术各个方面，产生了广泛而深远的影响。从早先晶体结构到近代粒子相互作用，群论成为不可或缺的工具。20 世纪末，安德鲁·维尔斯在证明费马大定理过程中，从 1993 年的系列演讲《模形式，椭圆曲线和伽罗瓦表示》开始，就应用了伽罗瓦理论。后来又经过一番努力，在 1994 年终于证明了费马大定理。到 21 世纪，人们认为，作为群论的“真正先锋”，伽罗瓦是有史以来屈指可数的对数学发展影响最大的数学家之一，这已是不争的共识了。

---

① 卡米尔·约当（1838-1922）是法国数学家，对分析和代数特别是群论有重要贡献。

② 索福斯·李（1842-1899）是挪威数学家，在微分方程研究中开创李群论，促进数学和物理发展。



维尔斯特拉斯

(1815—1897)

如果牛顿和莱布尼兹想到过连续函数不一定有导数（而这却是一般情形），那么微积分就决不会被创造出来。

——皮卡①

分析算术化的过程开始了

19世纪的数学，发生了三件意义深远的大事。

在30年代，罗巴切夫斯基和鲍耶挣脱欧几里得几何的束缚，创造了和它同样相容的几何——非欧几何。欧几里得几何的某些公理在那里不再得到满足。它打破了欧几里得几何是先验的、惟一的几何真理的神话，为更多新几何创立打开大门。

几乎同时，代数学也发生了类似的革命。以伽罗瓦、哈密顿、格拉斯曼和凯莱②为代表的数学家们创立了新的代数。普通代数里的某些公理在那里不再适用。它为群、环、域③、布尔代数、约当代

① 艾米·皮卡（1856-1941）是法国数学家，在分析特别是微分方程、复变函数和代数几何上有重大贡献。

② 阿瑟·凯莱（1821-1895）是英国数学家，近代纯粹数学不列颠学派的奠基人。

③ 环是数学中具有加法和乘法运算的集合，其中加法是交换的和结合的，乘法是结合的，并有零元素和单位元素，每个元素有负元素，以及有加法和乘法分配律。如果环的乘法满足交换律，称“交换环”。如果一个交换环关于乘法有单位元素，使它与集里任何元素的积就是该元素，并且除零元素以外的任何元素都有逆元素使任何元素与其逆元素的积是单位元素，这样的环称域。

数和李代数①等抽象代数的创立开辟道路。第三个具有重大意义的事件是分析的算术化。

微积分自牛顿、莱布尼兹创立以来，获得空前的发展。但是，它的许多概念还是含混不清的，它的基础仍旧薄弱。达朗贝尔首先察觉到需要有一个极限理论来消除混乱；拉格朗日则在《解析函数论》中作了有益的尝试；高斯比同时代数学家更早排除直观，对严密性提出更高的要求；最后是柯西把问题大大推进。他的极限理论对分析的发展和级数敛散性的判别都是必不可少的。但是，使数学家最终下决心摒弃凭直观推理而寻求更可靠基础的，是由于德国数学家卡尔·维尔斯特拉斯在 1874 年发表的一个和直观相悖的惊人发现：一条连续曲线却处处没有切线！

一个艰巨而漫长的分析算术化的过程开始了。

早年的波折

人们总以为，一个人要想在数学上取得成就，成为第一流的数学家，就必须从小受到良好的数学训练，而且不能把大量的时间和精力花在像中等教育这一类和数学创造无关的事务上。不过，被誉为“现代分析之父”的德国伟大数学家卡尔·维尔斯特拉斯可以说是个例外。

卡尔·维尔斯特拉斯于 1815 年 10 月 31 日诞生于德国西北部威斯特伐利亚区的奥斯坦菲尔德。父亲威廉·维尔斯特拉斯是受法国雇佣的海关职员，因为当时拿破仑的法国正统治着德国西部和大半个欧洲呢。威廉正直坦率，有一定文化素养，一度曾经当过教师。不过，和高斯的父亲一样，威廉在家里十分严厉而且专断。几乎一

① 布尔代数是一种代数系统，其中用字母表示的不是像算术代数中已知数或未知数，而是对象的类或逻辑学的命题，其中的运算是同集合论或逻辑学一致的。它是以英国“数理逻辑之父”布尔命名的。约当代数和李代数分别是为纪念法国数学家卡米尔·约当和挪威数学家索福斯·李而命名的近世数学。

直到卡尔 40 岁，父亲还在不顾儿子的才能和爱好，鲁莽地干预他的事务。幸好卡尔在意志和体格上都异常坚强。父亲的干扰使他的事业和生活走了一段曲折的弯路，但是终究没有挡住他登上光荣的顶峰。在卡尔后面，威廉和妻子肖朵拉·福斯特又生了彼得和两个女儿：克拉拉和爱丽丝。爱丽丝出世不久，肖朵拉不幸病故。母亲的为人鲜为人知，只知道她对自己的婚姻似乎不大满意。父亲于第二年再娶。继母是个典型的德国家庭妇女，对子女智力的发展说不上有什么影响。维尔斯特拉斯兄弟姐妹四人亲密无间，和睦相处，并且都没有结婚。可怜的彼得一度有过这种念头，可是很快被父亲的厉声斥责所吓退。

卡尔降生不久，维尔斯特拉斯全家搬到威斯特伐利亚的韦斯特康登村。父亲在那里任制盐厂的海关官员。韦斯特康登是个默默无闻的小村。一条坑洼不平的道路，两旁疏疏落落居住着二三十户人家，连一所小学也没有。小村今天在德国以至全世界出了名，只因为维尔斯特拉斯在这里度过他的青少年时代，而且他的处女作也是在这里完成的。14 岁，卡尔进附近帕德博恩城的一所天主教预科学校学习。在学校里，他如鱼得水，自由自在。他和善的性格和过人的智慧深得老师们的喜爱。学习规定的几门功课，他毫不费力，而且每年稳拿 7 项以上奖赏。通常首先是德语，其次是拉丁语、希腊语和数学。所以，在笛卡儿、费马等一大串数学家的后面又加上了维尔斯特拉斯的名字，他们不但是数学的巨匠，而且是语言学的大师。只有书法一项，维尔斯特拉斯没有获过奖。可是，具有讽刺意味的是，命运却安排他要在以后相当长的时间里，教那些刚刚脱离妈妈怀抱的孩童们写字！

卡尔学习出色，在实际工作中也身手不凡。从 15 岁开始，他就一边学习，一边在一位经营火腿黄油的女商人那里当会计。他把账目管理得井井有条，深得女主人的赏识，以致他的口袋里总不缺零花钱。

可是，这一连串的成功给卡尔带来一个意想不到的结果。从预

科学校一毕业，不容卡尔有半句分辩，父亲就把他送到波恩大学去学法律。威廉的理由很简单：卡尔能赢得这么多奖状，又能把账目管理得有条有理，表明他聪明过人而且是出色的簿记员。什么是簿记员的顶峰？当然是在普鲁士民政部当一名文官。要出任文官，不学法律怎么行呢？

卡尔没有欧拉幸运。欧拉在人生的十字路口有伯努利一家出来为他说情，使父亲最终打消要他从事神职工作的念头。卡尔孤掌难鸣。他不能指望恭顺的彼得和两个神经脆弱的妹妹给他帮什么忙。何况老维尔斯特拉斯比欧拉的父亲固执得多。到波恩去的决定，已经没有商量的余地。不过卡尔不是那种性格温顺、可以任人摆布的人。任何外力休想随意规定他生活的道路。父亲精心为他安排的生活到头来被他搞得面目全非，虽然他可能并没有意识到自己是在反抗父亲的意志。

波恩是座美丽的城市。鹅卵石铺筑的街道，绿树成荫，红白相间的房舍，到处是丁香、紫罗兰和不知名的鲜花，令人赏心悦目。可是，维尔斯特拉斯心绪恶劣，哪有心思欣赏！他恨不得到旷野里大喊大叫一场，或者让暴风雨淋个浑身湿透！虽然是学法律的，他对法律毫无兴趣。他对法律惟一的一次接触，是他坚决反对一个不学无术却善于巴结钻营的家伙被提名为法学博士候选人。每星期他难得去听几次课。他上教室听课远不及到大学对面的小酒馆频繁和准时。因此，他在学业上的进展与他在酒馆里所取得的成功相比，实在是微不足道。几乎每天晚上 6 点钟一敲，维尔斯特拉斯就出现在酒馆临街的一张小桌子上，风雨无阻。他用的是那种半加仑装的特大号啤酒杯，喝的时候，谁也不能用一只手轻易地把它举起来。他的烟斗是堪与酒杯匹配的特制的大烟斗。一只大酒杯，一支大烟斗，和他巨人般的身躯一起，显得十分匀称。由于他生性粗犷随和，隔不多久，老主顾们都和他交上了朋友。小酒馆每天顾客盈门，生意兴隆，光顾的大多是波恩大学的学生和教职员。屋子里烟雾迷漫，酒香四溢。不过，和那晶莹透明的琥珀色的当地土制啤酒相比，顾

客间为各种热门的话题进行辩论，似乎更吸引他们。辩论是这样紧张精彩，所有的顾客，甚至连酒店老板，都被吸引了过来。这时候，好像这里成了世界的中心。激动起来，有的干脆跳到椅子上去发言。但是，交锋激烈并不伤和气；气氛炽热仍不失诙谐。这正是辩论最为可贵的地方。在这种机智和智慧的较量中，维尔斯特拉斯很快以敏锐的洞察力、闪电般的反应、非凡的准确性和无懈可击的逻辑力量赢得不可战胜的名声。说到他的酒量，同样所向无敌。如果有人竟敢和他比试酒量，那么最后不省人事被抬着回去，谁也不会感到意外。维尔斯特拉斯超群的才智和强壮的体魄得到充分的表现，可惜不是在有用的方向。著名数学家兼物理学家普吕克尔①当时倒是在波恩；可是他正忙于他自己的事务。维尔斯特拉斯没有机会拜见他，更无法向他讨教。

不过，维尔斯特拉斯在雄辩和痛饮之余，还是阅读了不少数学名著。他和阿贝尔一样，“直接向大师们而不是他们的学生学习”。拉普拉斯的《天体力学》给他留下深刻印象。这部巨著曾经引导哈密顿走上数学家的光荣道路。这一次，它使维尔斯特拉斯一生对动力学和微分方程组发生兴趣。不过，对卡尔在这方面的进展，父亲并不理解。他只感到深深的悲哀和失望：一家人精打细算，省吃俭用，把全部希望寄托在最聪明能干的卡尔身上，谁想到 4 年以后，1838 年夏天，当他从波恩回来，肚子里装满啤酒，两手却空空如也，什么学位也没有得到！

良师指路

一片一筹莫展的愁云笼罩着维尔斯特拉斯一家。父亲喋喋不休的说教已经毫无效果。看到卡尔麻木不仁的神态，吓得两个妹妹直

① 朱利斯·普吕克尔（1801-1868）是德国数学家、物理学家，他在几何学和电磁学上有所发现，他发现阴极射线对科学发展有很大影响。

担心哥哥的神经是不是出了毛病。要给“从身体到灵魂”都被病魔缠住的卡尔安排一条出路真不容易。父亲经不住这次打击，病倒了。一天，一位海关的老朋友闻讯前来慰问。他是个数学业余爱好者，对卡尔的才能和爱好略知一二。他同情卡尔的处境。他以老朋友的身份向老维尔斯特拉斯出主意：让卡尔到附近的蒙斯特学院去学习两年，为参加国家教师资格的考试作准备。虽然这种学习得不到博士学位，如果考试合格，却可以找到一份教师工作。假如卡尔在数学上真有才能，在业余时间还可以花些功夫。老朋友的话说得头头是道，老维尔斯特拉斯动心了。1839 年 5 月 22 日，卡尔被蒙斯特学院正式录取。

一块天然的璞玉只有经过精心雕琢才能成为璀璨夺目的瑰宝。维尔斯特拉斯事业的真正转机是遇到一位不可多得的良师——克里斯托夫·古德尔曼。古德尔曼先生是蒙斯特学院的数学教授，身材矮胖，光脑袋，有一双和善的、若有所思的眼睛，使人感到亲切。他是函数论的热心研究者，特别对椭圆函数有独到的见解。受到大名鼎鼎的克列尔的鼓励，他在克列尔创办的《纯粹数学与应用数学杂志》（《克列尔杂志》）上发表过一系列这方面的论文。可惜，他把一切都基于函数的幂级数展开上这一数学思想，没有引起人们的重视。古德尔曼根据这条思路辛辛苦苦研究了一辈子，没有取得最后成功。但是，这个重要的思想确实哺育了维尔斯特拉斯。函数的幂级数展开成为他在分析中一切工作的核心。他在晚年谈到自己在分析中所采用的方法的时候常常说：

“没有别的，只有幂级数。”

它的意义是不难理解的。有一次格丁根大学的一个学生向数学家费利克斯·克莱因请教数学发现的秘密。克莱因告诉他：

“挑选好一个确定的研究对象，锲而不舍。你可能永远达不到终点，但是一路上准可以发现一些有趣的东西。”

古德尔曼向维尔斯特拉斯提供了这样的研究对象；这是一座使他一生受益无穷的宝库。怪不得维尔斯特拉斯在成名以后，总要利

用各种机会来表达自己对恩师的感激。古德尔曼是受之无愧的，因为并不是每个教授都能给自己的学生作出这样有价值的启发啊。

古德尔曼讲授椭圆函数的第一堂课，教室里一共坐着13名学生。他感到相当满意，不由得微微一笑。要知道在一年以前，只有两名学生，而且不到一个月，他们都“逃之夭夭”了。他阖上讲义，眼睛一闭，把头微微抬起。这是他开始讲课的习惯姿势。一接触到椭圆函数这个心爱的课题，他的思想就像决堤的洪水，排山倒海，一泻千里。他讲课充满热情，打着激动的手势，可是没有条理。学生们很快被远远抛在后面。他们注视着黑板上一串串龙飞凤舞的公式，显得垂头丧气。只有一个人例外。他就是卡尔·维尔斯特拉斯。他瞪大眼睛，感到从来没有过的兴奋。古德尔曼向他展示了一个崭新的天地。他可以发挥无穷的精力和才智，在这片美丽的一望无际的土地上尽情驰骋啦！

第二次上课的时候，只剩下维尔斯特拉斯一人。其余的学生再也不敢问津这块神圣的领地。如果说，偶尔还有人敢于站得远远地向教室窥视，那完全是出于好奇。头两个月，只看见古德尔曼手舞足蹈地对着入了迷的学生滔滔不绝地讲解。后来，讲课变成了讨论。古德尔曼站在讲台上，维尔斯特拉斯则坐在课桌上而不是椅子上，这样，魁伟的学生和矮胖的老师讨论起来恰好处于“平等”的地位。半年以后，维尔斯特拉斯开始在黑板上大段大段地推导公式了。

1841年，也就是在中学试教一年以后，维尔斯特拉斯为取得教师正式证书接受考试。考试分两部分。第一部分是书面考试，要求考生在半年内写出三篇规定的论文；论文通过以后，再接受面试。

维尔斯特拉斯提交的论文中有一篇是对中学教学中一问一答式的苏格拉底教授法的总结。这位古希腊伟大学者采用这种方法吸引广大学生，造就了大批人才。后来，维尔斯特拉斯遵循这种方法取得巨大成功，成为全世界高等学府中最优秀的数学教师。

最值得注意的是另一篇论文。这是古德尔曼给维尔斯特拉斯出的一个真正的数学难题：把椭圆函数表示成幂级数。这无疑是教师合格

考试史上最艰深的问题。古德尔曼在给教育局的报告中这样写道：

“这个问题是应考生本人要求并得到考试委员会的同意提出的，一般来说，它对于一个年轻的分析学者是过于困难了。”

古德尔曼在叙述了维尔斯特位斯所取得的成果以后指出，从工作的开创性和某些结果的戏剧性可以充分看出作者的数学天才，“只要不被浪费，他必定会对科学的发展作出贡献。为了作者，也为了科学，不要让他去当中学教师而让他在大学中任教，那里的良好条件将使这一点成为可能。……该考生将根据天赋的权利而跻身于著名发明家的行列。”

古德尔曼为了强调，特地在有的句子下面划上一道粗粗的横线。这样一份热情的评语本来可以改变维尔斯特拉斯的生活进程。可惜，它在正式报告中竟被人莫名其妙地删掉了！这样，维尔斯特拉斯通过考试，除了一张中学教师合格证，什么也没有得到。26 岁的维尔斯特拉斯从此开始长达 15 年的中学教书生涯，其中包括 30 岁到 40 岁这一段通常被认为是科学发明创造的黄金岁月。

只问耕耘

1842 年，维尔斯特拉斯到西普鲁士一个偏僻小村的一所大学预科学校预备班任数学和物理课的助理教师，不久晋升为正式教师。除了数学和物理，他还要教德文、地理和写字。过了 3 年，学校又给这个精力充沛的小伙子加上一份工作：教体操。

工作繁重不说，住在偏远的小村，生活是难以想像的艰辛。微薄的薪水只够维持最简单的生活。饮酒不得不大大克制；有时候甚至连寄信的邮资都没有。交通不便，一天只有一次驿车。带来的不外是哪个地方的教堂失火或者某公爵的女儿成亲一类的消息。遇上天气不好，交通就十天半个月被堵塞。生活单调得使人窒息。但是，维尔斯特拉斯没有怨言。这不仅是因为他脾气好，他实在没有时间抱怨。古德尔曼向他打开了数学宫殿的大门。宫殿中无比神奇的景

象使他目不暇接。白天，他忙着上课、批改作业以及和孩子们一起嬉戏；一到晚上，他就关上房门，点起蜡烛，通宵达旦地在数学之宫神游。只有像维尔斯特拉斯这样具有坚强意志和强壮体魄的巨人才能这样工作。他直接向大师们学习，而给他印象最深、也是他最为推崇的是阿贝尔。这位终身为贫困和疾病所困扰的挪威数学家所迸发出来的天才光芒使他赞叹不已。在维尔斯特拉斯成为世界最著名的分析学家和最杰出的数学教师以后，他给学生们第一个和最后一个忠告就是：

"读读阿贝尔！"

他对阿贝尔丝毫没有嫉妒的成分。他喜欢说：

"阿贝尔是个幸运儿。他完成了名垂千古的工作。他的思想对我们科学将始终产生多方面的影响。"

其实，这个评价对维尔斯特拉斯本人同样适用。他的道路在不少方面也和阿贝尔相似。他们在早年都受到过挫折；维尔斯特拉斯是在几乎与世隔绝的偏僻的小村，独立地展开独创性的研究，就像阿贝尔在完全不了解高斯关于椭圆函数工作的情况下，独立开拓自己的道路。维尔斯特拉斯以自己独特的方式发展各种理论，而很少参考其他经典著作。实际上，他当时的条件也确实无法找到这样的著作。这种特点往往使后来的编辑者感到困惑：究竟谁是真正的经典作家呢？

维尔斯特拉斯在这期间写了一篇有关解析函数的论文。他独立地得到了今天被誉为分析基本定理的柯西积分定理。第二年，也就是1842年，柯西发表了和维尔斯特拉斯同样的结果，引起巨大的轰动。维尔斯特拉斯当然知道，这意味着什么。因为这是不朽之作；它的作者将在数学史上占有光荣的一席。维尔斯特拉斯默不作声。虽然科学史上关于优先权的争论司空见惯，他不打算对柯西的优先权提出争议。他当然明白，这意味着他将在西普鲁士的一个小村继续默默无闻地当一名教师。这使人想起数学王子高斯。早在30年前高斯就发现了这个结果。不过他嫌不够成熟，没有拿出来发表。他



们不计名利得失的豁达态度成为科学家的楷模。他们在当时是受到了委屈。但是历史是公正的。历史公正地评价了他们的品格、才能以及他们在数学发展史上的地位。

1842 年，维尔斯特拉斯利用自己创造的方法来求解微分方程组；这种方程组在三体问题中是经常遇到的。他的方法成熟而且严格。这一次他同样没有拿出来发表，因为这只是他为一生的事业、为下一步更大的飞跃作准备。他已经下定决心，要“完成由阿贝尔定理和雅可比对多变量多重周期函数的发现所肇始的阿贝尔和雅可比一生的工作”。

早在 17 世纪，人们在天文学中就遇到求椭圆的弧长问题，在力学上也开始研究弹性细杆在端点受力情况下的形状。这些问题导致所谓椭圆积分的产生。这类积分不能用我们所熟悉的初等函数表示出来。雅各布·伯努利、约翰·伯努利和欧拉在这方面作了不少工作。花费最大精力的是勒让德。但是，这个问题一直到阿贝尔和雅可比通过椭圆积分的反演构思椭圆函数，才有真正的突破。这使勒让德透彻地、也难免有点痛苦地认识到，阿贝尔和雅可比的工作使自己 40 年所做的一切黯然失色。他错过了他所处时代的一项最伟大的发现！顺便指出，高斯早在阿贝尔出世以前已经得到椭圆函数论中许多关键性的结果。这些结果是他去世以后在他没有发表过的遗稿中发现的。椭圆积分和相应函数的研究成就激励数学家们去处理一种更难类型的积分——超椭圆积分，以及由此产生的阿贝尔积分和阿贝尔函数。阿贝尔因为英年早逝没有来得及把自己的惊人发现研究到底；雅可比没有能看出自己在阿贝尔定理研究中的真正含义。维尔斯特拉斯决心发展出必要的工具，以完成他们未竟的事业：“把这些成果统一起来并加以推广——实际表示出函数并找出它们的性质。”

但是进展并不顺利。中学的繁重工作耗去他大量时间和精力；而资料缺乏，同科学界的隔绝，更使研究困难重重。不过，困难已经无法阻挡维尔斯特拉斯前进。他凭着超人的智慧和非凡的毅力，

默默地坚韧不拔地开拓着前进的道路。

一朵浪花

1848年，维尔斯特拉斯调到勃朗斯堡大学预科学校任教。这是一次小小的晋升。老校长知道维尔斯特拉斯精力充沛而且极有才能，对他十分关怀和器重。最使维尔斯特拉斯满意的是学校有一个满不错的图书馆。图书馆虽然不大，它的数学和科学藏书却是本本精选过的。这说明管理学校的是一位有造诣的学者。大师们的经典著作给他启发，也使他鼓舞；先驱者光辉的榜样坚定他前进的决心和信心。有名的《克列尔杂志》的风格和质量给他留下深刻的印象。正是杂志的创始人克列尔以超人的眼力发现了阿贝尔的天才。《克列尔杂志》头三卷一共刊登了阿贝尔22篇论文，尽管有些内容克列尔本人不一定完全看得懂。在羽毛未丰的年轻人的前进道路上，多么需要克列尔般的扶持啊！

1848年在欧洲是个重要的年头。那一年，法国的二月革命推翻路易·菲力普七月王朝，成立共和国。它鼓舞德国人民为结束封建的分崩离析状态，推翻霍亨索伦王朝[①]，建立统一的德意志民主共和国，而积极行动起来。维尔斯特拉斯也热血沸腾，跃跃欲试。刹时间，各地报刊要求民主和自由、要求统一的呼声纷纷出现。保皇党慌忙对报刊实行严格的检查制度。它不能容忍"法律"和"秩序"遭到破坏。勃朗斯堡也不例外。政府任命一名文官来负责检查当地的各种刊物。幸好这位检查官对各种形式的文学作品，尤其是诗歌，毫无兴趣。他从老校长那里了解到，维尔斯特拉斯有无穷精力而且对文学相当精通。他决定把文学作品统统交给维尔斯特拉斯，自己只负责检查政论文章。得到这样一份美差，维尔斯特拉斯异常

① 霍亨索伦王朝是欧洲历史上的著名王朝，勃兰登堡-普鲁士（1415-1918）及德意志帝国的主要统治家族。

高兴。他知道检查官对诗歌不会瞧上一眼，就放心地把那些最大胆的诗篇毫无保留地送去发表。刊物引起公众的巨大兴趣，发行量急剧上升。可惜好景不常。这一情况终于被更高一级当局察觉。检查官被免职；维尔斯特拉斯又回到学校干他的教书本行。

德国1848年革命中泛起的一朵小浪花消失了。

但是，维尔斯特拉斯为完成阿贝尔-雅可比未竟事业的工作热情并没有熄灭。德国的中小学当时出版一份刊物，它不定期地刊登中小学教师的论文。刊物在1848年-1849年刊载了维尔斯特拉斯的《阿贝尔积分理论》一文。如果这篇文章有机会让德国专业数学家看到，肯定会引起巨大反响。可是，谁能指望他们会在中学教师的论文汇编中去寻找纯粹数学方面的划时代的突破呢？

迟到的春天

时光在维尔斯特拉斯不知疲倦的工作中悄悄流逝。经过近10年的潜心准备，他决定对阿贝尔函数发起总攻了。1853年夏天，他回到韦斯特康登，在家里过暑假。父亲已经年过花甲，不过身体依旧硬朗。弟弟和妹妹看到卡尔没日没夜地工作，虽然不了解他在研究什么，却知道要尽力使他不受干扰。在假期，维尔斯特拉斯的研究取得重大进展；回到勃朗斯堡，工作进入最后也是最紧张的阶段。

一天上午，学生们的大声喧闹惊动了办公室里的老校长，一了解，原来他们的老师维尔斯特拉斯已经两天没有来上课了。校长气喘吁吁来到维尔斯特拉斯的房间，敲门进去一看，窗帘遮得严严实实，维尔斯特拉斯借着微弱的烛光正坐在桌旁聚精会神地工作。他已经工作了两个通宵。校长告诉他，外面红日高照，他的学生正在教室里大叫大闹。维尔斯特拉斯从沉思中抬起头来，回答道：

“对不起,先生。我正在完成一项重要发现;我无法中断工作。”

一篇关于阿贝尔函数的划时代的论文完成了！维尔斯特拉斯以自己独特的思想和方法完备、改写和美化了椭圆函数理论，从而使

他和柯西、黎曼一起成为函数论的主要奠基者。他决定以阿贝尔为榜样，把它寄给柏林的《克列尔杂志》发表，他相信这将引起轰动。《克列尔杂志》没有使他失望。第二年也就是在1854年第47卷上，杂志全文刊登了维尔斯特拉斯的这篇论文。这是《克列尔杂志》对数学发展作出的又一个重大贡献。

论文立刻引起巨大的轰动。使人惊讶不已的是，这么一篇伟大杰作竟出自一位不知名的偏远的乡村教师之手。这是一项规模宏大的工程，包含大量创造性的成果。人们还感到不解：为什么即使其中某项单独的成果也从来没有披露过？这几乎是没有先例的啊。

柯尼斯堡大学是椭圆函数的发祥地之一。当年雅可比教授在这里对椭圆函数作出过重大贡献。现在，理查劳特教授是雅可比多周期函数理论的出色继承者。他一看到维尔斯特拉斯的论文立刻就明白，这位中学教师完成了一项多么了不起的工作。他敦促学校授予维尔斯特拉斯博士学位，并且立即启程，亲自把证书送到勃朗斯堡。在老校长举行的宴会上，理查劳特满怀激情地大声宣布：

“我们终于找到我们的大师——维尔斯特拉斯！”

参加庆祝活动的教育部长当场提升维尔斯特拉斯并且慷慨地给他一年假期来继续完成他的研究。这大概是教育部为了弥补多年来对维尔斯特拉斯不公正的待遇吧。《克列尔杂志》编辑勃恰特也兴冲冲赶到勃朗斯堡来向这位世界最伟大的分析学家祝贺，从此开始了这两位朋友令人难忘的友谊，直到25年以后勃恰特去世。

一切是来得这么突然。对自己的工作这样迅速得到毫无保留的承认，使维尔斯特拉斯深深感动，也不无感触。正如他晚年的时候所说：

“生活中的一切来得太晚啦！”

两年以后，《克列尔杂志》刊登了维尔斯特拉斯早年在西普鲁士偏僻小村写的另一篇论文：《评解析阶乘》。提到这篇论文，不是因为阶乘是一个使老分析学家感到头痛的问题，而这一次维尔斯特拉斯抓到了问题的核心；值得一提的是克列尔可贵的品格。要知道

克列尔本人，作为数学的业余爱好者，在《克列尔杂志》上发表过一系列有关阶乘的论文，维尔斯特拉斯的论文实际上正是针对克列尔的错误而写的。为此，克列尔在维尔斯特拉斯的论文前面写了一段令人难忘的按语。他在坦率地承认维尔斯特拉斯所指出的错误以后，真诚地接着写道：

"我决不把我的作品看做是个人的私事，也不追求名誉和赞美。我只是为真理的进展竭尽所能。是我还是别的什么人，对我来说无关紧要，重要的是它更接近于真理。"

克列尔是这样说的，也是这样做的。维尔斯特拉斯把指出克列尔错误的论文送到《克列尔杂志》发表，是不奇怪的，因为他充分信赖克列尔的明智和博大胸怀。

教师典范

维尔斯特拉斯没有回勃朗斯堡；那里没有他合适的工作。柏林的数学家们克服困难让他到柏林皇家工业学校任数学教授。这是1856年7月1日。同年秋天，他又兼任柏林大学助理教授①并且被选为柏林科学院院士。为了弥补过去的损失，维尔斯特拉斯以空前热情投入工作。但是事与愿违。极度紧张的研究和过于频繁的演讲把他累垮了。1859年夏天，他因为神经衰弱被迫到外地休养。秋天回来，身体有所康复。可是毫无节制的工作又使旧病复发。第二年3月，突发性一阵阵眩晕，迫使他不得不中断课程。从此以后，眩晕病时断时续。他的教学负担大大减轻，而且再也不亲自上讲台讲课了。他开始改变讲课的方式。上课的时候，他坐在靠近黑板的教室一侧，这样既可以看到黑板，又可以看到全班学生。他向班代表口授内容，再由班代表把它写在黑板上。要是这个代表突然心血来潮，想把维尔斯特拉斯讲的内容稍稍"发挥"一下，这种企图常常

① 助理教授是介于副教授和讲师之间的一种职务。

会得到坚决的制止。他走上讲台把画蛇添足的部分擦掉。这时候班代表和老师之间可能会展开一番有趣的辩论。不过，用不了几个回合，全班学生就清楚了解到，他们的代表是怎样把事情弄巧成拙的。整个教学过程生动活泼，气氛十分活跃。

师生之间的思想交锋，受益的不仅是学生；它为维尔斯特拉斯的研究工作提供了有价值的线索。要说服学生必须使自己的推理无懈可击。维尔斯特拉斯正是一个不凭直觉、仅仅依靠缜密推理一步一个脚印向前推进的人。人们交口赞誉的"维尔斯特拉斯严密性"已经成为严格推理的同义语。在教学过程中他发觉，分析中的概念经过柯西等人的努力已经大大前进，但是有的地方仍旧含糊不清。比如，"一个变量趋于一个极限"，容易使人想起时间和运动；"变为而且保持小于任意给定的量"，这个说法也不明确。这些缺陷最终导致维尔斯特拉斯"δ-ε"语言的发明。用"δ-ε"语言来解释分析中的基本概念已经为今天大学课本所普遍采用。维尔斯特拉斯把分析的概念由动态的表述改为静态的，这样就更加明确清晰，也更有说服力了。

为了说明直觉的不可靠，维尔斯特拉斯在1872年的一次讲课中构造出一个连续函数却处处没有导数的著名例子，震惊了整个数学界。这是和人们的直觉大相径庭的。在过去，人们习惯于把曲线看做是动点运动的轨迹。动点运动的方向就是切线方向；因此，没有切线的连续曲线是不存在的。怪不得在柯西以后近50年中的教科书都"证明"过这个结论呢。现在，居然有处处没有切线的连续曲线存在，这个事例不但彻底推翻了过去的"证明"，而且使人们在今后的推理中不得不小心翼翼地摒弃直观，为分析寻求更深厚的基础。几何直观不可靠，什么才是可靠的？可靠的只有数。数学家克罗内克[①]把这种观点表述得最为形象：

① 利奥波德·克罗内克（1823-1891）是德国数学家，在代数、分析和数论上有重要贡献，他的数学哲学思想也有较大影响。

“上帝创造了整数，其他一切都是人造的。”

因此，只有把分析建立在整数的基础上才是可靠和合理的。这就是数学史上著名的“分析算术化”运动的起源，而维尔斯特拉斯是这个运动的开路先锋。

维尔斯特拉斯在课堂上循循善诱，并且把教学和研究紧密结合，这样既造就了大批人才，又推进数学的发展；在课后，他又是那样平易近人，和蔼可亲。他喜欢和学生们一起步行回家，一边走，一边聊，话题五花八门。凡是学生们感兴趣的，维尔斯特拉斯都有浓厚的兴趣。路过小酒店，他总要邀请他们进去小酌一番。透过一圈圈烟雾，呷着啤酒，进行无拘无束的谈话，使他有说不出的畅快。

维尔斯特拉斯的名声越过德意志边界传到欧洲，传到美国。听课人数的增加已经失去控制，过道上挤满了座位，有的就干脆站着听。维尔斯特拉斯有时感到遗憾，听众的素质远远落后于人数的膨胀。不过，用不着担心，在他的周围总有一批极有才干的青年数学家，他们衷心地敬爱他并且积极宣传他的思想。这一点尤为重要。因为维尔斯特拉斯在发表自己论文方面总是慢条斯理，反复推敲，从来不为优先权操心。要是没有得意门生及时地把他的思想大力向全世界传播，他对 19 世纪数学思想的影响恐怕就要大大削弱了。

说到维尔斯特拉斯的得意门生，有一段值得一提的插曲。1873 年，瑞典的米塔-列夫勒①从斯德哥尔摩慕名来到巴黎，向著名的法国数学家埃尔米特学分析。埃尔米特为人热心，心胸宽大。他得知米塔-列夫勒的来意以后，真心诚意地对他说：

“先生，你搞错了。你应当到柏林去听维尔斯特拉斯的课，他才是我们所有人的老师。”

作出这样的推荐是何等的难得！要知道埃尔米特本人并不是二三流的数学家，而是享有世界声誉的真正第一流数学家；而且法德

---

① 米塔-列夫勒（1846-1927）是瑞典数学家，在数学分析上有所发现。他对北欧数学发展有所贡献。

两国两年前刚刚打了一场残酷的普法战争，普鲁士的“铁血宰相”俾斯麦统率的普鲁士军队一直进攻到巴黎城下！

米塔-列夫勒接受埃尔米特的忠告，来到维尔斯特拉斯的门下。果然，两年以后，他作出了一项重大的发现：对复变函数论中基本定理——柯西定理作出严格的证明。这个证明在今天函数论书籍中都可以找到。米塔-列夫勒感慨万千。他说：

“埃尔米特是法国人而且是爱国者，但是，我更认识到，他是一位什么样的数学家！”

最宠爱的女弟子

在维尔斯特拉斯众多的杰出弟子中，不能不提到俄国著名女数学家——索菲亚·柯瓦列夫斯卡娅。对她，维尔斯特拉斯不仅倾注了心血，还倾注着深情。柯瓦列夫斯卡娅是近代重要的女数学家，也是妇女解放运动的领导人之一。除此以外，她还是优秀的作家。年轻的时候，她长期在文学和数学之间徘徊。她在数学上写出一篇重要论文以后，还写过一本描写她童年时代在俄罗斯生活的小说作为消遣。这本小说首先在瑞典和丹麦出版，后来译成多国文字。这本名为《维拉·伏龙佐娃》的小说受到俄国和斯堪的纳维亚文学批评家的一致好评，认为无论在内容上还是艺术上都足以和俄国第一流作家



柯瓦列夫斯卡娅



的小说媲美。

1850年1月15日，索菲亚·柯瓦列夫斯卡娅诞生于莫斯科的望门贵族，父亲是一名将军。她15岁开始学习数学，不到3年，已经取得长足进步。1869年以来，她在海德堡大学一边听利昂·康涅斯博格椭圆函数理论，一边听德国物理学家亥姆霍兹和基尔霍夫的物理课程。康涅斯博格是维尔斯特拉斯第一批学生，他看到索菲亚是数学天才，热情地介绍她到柏林直接向维尔斯特拉斯求教。

1870年暑假，维尔斯特拉斯本来打算和往年一样到外地休养。可是普法两国正打得不可开交，交通工具都被征用来为战争服务。他只好打消外出度假的念头，继续留在柏林教他的椭圆函数。由于战争，大批青年应征入伍。听课的人数减少了一大半。和当年热气腾腾的场面相比，教室里显得有点冷清。一天中午，维尔斯特拉斯正在房中小憩。外面烈日炎炎，知了聒噪。一阵敲门声把他从假寐中惊醒。敲门的不是别人，正是索菲亚·柯瓦列夫斯卡娅。她听从康涅斯博格的忠告，行色匆匆径直来到柏林维尔斯特拉斯的住所。这一天，她穿一件合身的白色连衫裙，头戴一顶大檐的软帽，这样既可以掩饰她紧张的心情，又使人看不到她动人的眼睛。维尔斯特拉斯的学生都是男性，这次看到一位天使般美貌的年轻女子来求学，不免感到意外高兴。要知道索菲亚的美丽和她迷人的眼睛是出名的，这里还有一则有趣的故事呢！

在海德堡大学工作的德国著名化学家本生是个性情孤僻的鳏夫，整天在实验室里和化学药品、仪器打交道。他一次因为爆炸失去了一只眼睛；一次因为砷中毒几乎丧身。他公开宣称，不允许妇女特别是非德意志妇女进他的实验室以亵渎他实验室中男性的圣洁。碰巧索菲亚的一个朋友，也是一位俄罗斯姑娘，想到本生的实验室学习化学。她的要求遭到本生直截了当的拒绝。这位姑娘请求索菲亚帮忙。索菲亚把帽子留在家里去见本生。她那双撩人心弦的眼睛使本生完全忘记自己的誓言，一口答应她的要求。等到索菲亚飘然离去，本生才醒悟过来。后来，在一次聚会上，他向维尔斯特拉斯后

悔不迭地承认："咳，是那个女孩子使我食言！"并且再三称她是个"危险的女郎"。本生不知道，那时候索菲亚接受维尔斯特拉斯私人授课已经两年多了！

索菲亚到大学听课，必须得到大学评议会的同意。可是评议会的委员们采取毫不通融的态度。在封建的德国，女子是被拒在高等学府大门之外的；只有具有民主传统的格丁根大学是光荣的例外。维尔斯特拉斯毫不屈服。尽管自己健康状况不佳，他决定每个星期天下午在家里专门为索菲亚上课，并且每星期回访一次。本来，维尔斯特拉斯作为老师，在礼节上并没有回访的必要。他这样殷勤，恐怕要怪索菲亚在一开始没有向老师说明，自己是一个已婚女子，虽然还只是名义上的。在 19 世纪 70 年代，一个未婚的女学生出国留学是要遭人议论的。为了制止流言蜚语，她和莫斯科大学古生物学研究生弗拉基米尔·柯瓦列夫斯基名义上结婚以后就独自一人来德国留学了。

从第三次上课起，索菲亚就把帽子留在家里。中途除了假期和生病，课程从 1870 年一直持续到 1874 年。那一年，索菲亚因为一篇有关偏微分方程的论文缺席获得格丁根大学的学位以后，回到俄国。一到圣彼得堡，她立刻被崇拜和谄媚的人群所包围，淹没在鲜花和掌声之中。尽管维尔斯特拉斯多次去信，索菲亚音信杳然。1878 年，对概率论有重要贡献的俄国数学家切比雪夫（1821-1894）来德国拜访维尔斯特拉斯，不巧他正好外出，没有见到。后来勃恰特把切比雪夫的口信转告给他：索菲亚已经放弃数学，进入社交界。维尔斯特拉斯听到以后十分难过。他好几天闷闷不乐，最后竟病了一场！

1878 年 10 月，索菲亚因为女儿芳菲降生，被迫退出社交界。清闲无事的状况再次激起她的数学热情。她写信请维尔斯特拉斯给予指导。维尔斯特拉斯回信说，他需要查阅有关资料以后才能发表意见。虽然她长期冷落他，他仍旧准备一如既往地给予慷慨帮助。"我不愿意纠缠过去。好啦，让我们放眼未来吧。"1880 年 10 月，

索菲亚再次写信向维尔斯特拉斯求教。没有等维尔斯特拉斯回信，她已经收拾行李到达柏林。维尔斯特拉斯花了整整一天给她补课，并且建议她研究一下晶体介质中光的传播。他的关怀和教诲大大激发索菲亚的工作热情。3个月以后，当索菲亚返回莫斯科，朋友们对她的干劲大吃一惊。1884年，经米塔-列夫勒的帮助，索菲亚出任斯德哥尔摩大学终身教授。

维尔斯特拉斯浇注的心血终于结出成果。1888年圣诞节前夕，索菲亚《论刚体绕固定点的旋转》一文获法兰西科学院颁发的鲍罗廷奖。这个奖的竞争者在送寄论文的时候，必须把自己的名字封在另一只信封里。只有当论文获奖的时候，才能够打开信封看到论文作者的真实姓名。这样做为的是使评判尽可能地公正。评委会对索菲亚论文的评价是如此之高，以致决定把奖金破格地由原来宣布的3000法郎提高到5000法郎。这个消息使维尔斯特拉斯欣喜异常。他写信给索菲亚表示热烈祝贺：

“我无须对你说明，你的成功使我、我的妹妹和你在这里的朋友们是多么的高兴。我尤其感到真正的满意：有资格的评判已经表明，我‘忠实的学生’，我‘柔弱的朋友’，的确不是一个‘轻浮的牛皮大王’。”

可惜两年以后，1891年2月10日，维尔斯特拉斯的这位任性而富有才华的学生患肺炎病逝于斯德哥尔摩。终年仅41岁。

尾声

维尔斯特拉斯的晚年，由于用脑过度，体力日益衰退。但是他的思想仍旧敏锐，他的工作一刻没有停息。

维尔斯特拉斯70岁生日那天，他在全欧洲的弟子和过去的学生都来到他的身边，开了一个隆重而热烈的庆祝会。从那以后，他公开讲课愈来愈少。他只收少数几个学生在自己的家里上课。累了的时候，学生们就和他聊天，听他饶有兴味地回忆学生时代的各种恶

作剧和他当乡村教师的日子里的艰苦状况。80 岁生日的庆祝活动更为盛大；维尔斯特拉斯成为德国人民的骄傲，一位民族英雄。

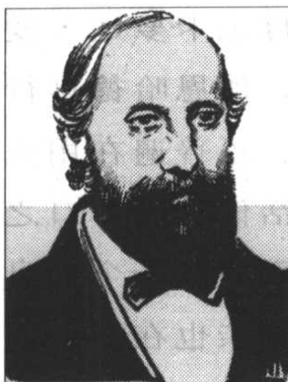
索菲亚去世以后，维尔斯特拉斯把她给他的全部信件，连同他的其他信件，可能还有不止一篇的数学论文，都付之一炬。不过，在索菲亚的遗物中还可以找到维尔斯特拉斯的一部分信札。这些信件不仅反映出维尔斯特拉斯对这位弟子的钟爱，而且在科学上无疑具有重要意义。可惜索菲亚是个相当随便的人，她保存的资料杂乱无章，而且显然残缺不全。

维尔斯特拉斯本人也好不了多少。他把没有发表的手稿随便借给学生，不作任何登记。他们常常一借不还；有的甚至毫无顾忌地剽窃他的成果，以他们自己的名义发表。他在给索菲亚的信中抱怨这种可耻的行径。不过，他的恼火主要是由于他们对他思想的低劣处理给数学造成不良的后果。索菲亚也不是没有过错。她显然丢失了维尔斯特拉斯寄给她的一篇极为重要的论文。从维尔斯特拉斯的信中来看，每次维尔斯特拉斯提到这个问题，索菲亚总是小心翼翼地把它支开了。可能为了弥补自己的过失，索菲亚尽力使维尔斯特拉斯对其余没有发表的手稿采取预防措施。可惜她的愿望最后付诸东流。维尔斯特拉斯在外出旅行的时候，喜欢把没有完稿的稿子装在一只白色小木箱里跟随他一起旅行。和高斯一样，他总是要把自己的成果雕琢得尽善尽美才肯拿出来发表。在车厢里，他一边眺望远处的景色，一边专心思考问题。一旦来了灵感而手边没有纸，他就把结果写在自己衬衫的袖头上！十分遗憾，在 1880 年的一次旅行中，他神秘的小木箱失踪了，从此再也没有发现！

维尔斯特拉斯是一位真正的巨人。他的工作是开创性和根本性的；他的成果丰硕而且坚实。他在幂级数基础上建立解析函数理论和解析开拓方法，发展和完善椭圆函数理论，成为 19 世纪数学中最惊人最优美的创造——函数论的重要奠基者；他为分析的严密化作出了不可磨灭的贡献，是分析算术化运动的开创者之一；他对天文学的 n 体问题和光学都有重大建树。由于他难得及时发表自己的成

果，因此很难确定他的创作日期。他的成果大部分是在柏林大学讲课的时候由他的学生陆续向外传播的。但是，尽管其他人的工作可能发表在他以前，人们一眼可以看出，维尔斯特拉斯是完全独立于他们作出创造的；他的成果具有明显的维尔斯特拉斯标志。他是伟大的数学家，又是杰出的数学教师。他高尚的风范和精湛的艺术是永远值得全世界数学教师学习的光辉典范。

1897 年 2 月 19 日，一代分析大师维尔斯特拉斯平静地在柏林的寓所停止了呼吸。他的最后愿望是，只要神父做一次合乎惯例的祈祷，不要在葬礼上为他歌功颂德。



黎 曼

(1826—1866)

数学享有崇高的声誉还有一个原因，是数学为精密的自然科学提供了某种可靠的变量，没有数学，它们是无法做到的。

——爱因斯坦

最美妙的对比

作家曹雪芹（约1715-1763）一生只写了一部《红楼梦》，可是这部作品值得用金边把它镶嵌起来。这用来形容黎曼的工作同样十分恰当。在短促的一生中，黎曼的全部著述合起来只有不厚的一卷，可是他的每一篇论文无不具有深远的革命意义。可以这样说，没有黎曼的工作，近代科学思想的伟大革命就不可能实现，除非后来有人创造出黎曼所发明的概念和数学方法。可惜在他发明的大树结出硕果以前，他已经与世长辞。要是当时的医学达到今天的水平，他至少还能多活二三十年，那么，在科学史上将会用金光闪闪的大字这样写着：

“黎曼——19世纪的牛顿、爱因斯坦！”

1826年9月17日，乔治·弗雷德里希·伯恩哈德·黎曼诞生于德国北部汉诺威的伯莱塞兰士村。父亲乔治是村里路德新教①的

① 马丁·路德（1483-1546）是德国宗教改革家，路德新教否定教皇权威，提倡“信仰得救”。

牧师，年轻的时候曾经参加过反对拿破仑的战争。母亲卡萝廷·爱芭是法庭顾问的女儿。他们俩一共生育了6个子女，伯恩哈德排行第二。汉诺威当时相当落后，农村里因为缺少牲口，还普遍在用人力拉犁。偏僻乡村的小牧师的薪金少得可怜。要养活偌大的8口之家，不能不显得捉襟见肘，力不从心。因此，黎曼家的孩子个个身体瘦弱，营养不良，他们大都过早地离开了人世。母亲也在孩子们长大以前结束勤劳的一生。但是，物质生活的清苦，没有剥夺黎曼一家生活的温暖和愉快。父母亲善良的心地和温和的性格给子女们以良好的影响。兄弟姐妹们相亲相爱，其乐融融。伯恩哈德一生始终保持着儿时生活的美好回忆，并对故乡怀有深深的思念之情。

小黎曼生性十分胆小，羞怯。他不敢在公众场合中露面，更害怕在大庭广众中讲话。一切熟悉黎曼的朋友都喜爱他腼腆谦逊的性格。可是，在科学思想上，他却是出奇地大胆。他蔑视一切困难险阻，在科学的领地上纵横驰骋，创造出一个又一个奇迹。这实在是在一个人的身上可能有的最最美妙的对比。

不久，父亲调到魁克彭工作。5岁的小黎曼开始在父亲指导下学习。老黎曼是位优秀的教师。他娓娓动听的讲解激起孩子强烈的求知欲望。小黎曼对历史最感兴趣。波兰人民争取独立和自由的历史，深深震撼着孩子幼小的心灵。他含着热泪，一遍又一遍地听父亲讲述这些可歌可泣的历史的诗篇。

小黎曼在6岁学习算术。在兄弟姐妹当中，他的数学天赋一开始就显得异常突出。父亲绞尽脑汁出的难题不但难不倒他，反而激起他更大的热情。很快，他就学父亲的样子，编题目给弟弟妹妹做。他的题目构思巧妙，别具一格，甚至把老黎曼也吸引住了。没有丰盛的食物，没有漂亮的衣服，一家人围着一张破旧的小圆桌，在数学百花园里追逐游戏，在面红耳赤的争论中享受到最大的乐趣。创造的喜悦使小黎曼激动万分。等到大家好不容易地越过他设计的第一个“陷阱”，他已经布置好了又一座更加引人入胜的“迷宫”。一上10岁，小黎曼跟从一位名叫肖尔兹的老师学习几何和更高深的算

术。肖尔兹是当地有名的教师。可是他很快发现，自己已经落在学生的后面。小黎曼对问题的解答常常比自己的更快更好。

读书在当时的汉诺威是属于少数有钱人家的奢侈品。黎曼夫妇看到伯恩哈德比其他的孩子聪明得多，决心尽一切力量把他培养成一个有学问的人。小黎曼14岁的时候，父亲送他到汉诺威的祖父家中，进了当地的大学预科学校。离开温暖可爱的家庭，来到一个陌生的环境，小黎曼感到很不适应。他寒伧的穿着和羞涩内向的性格成了富家子弟们取笑的对象。他感到孤独。即使自己的学习成绩总是在全班名列前茅，也不能使他得到安慰。只有在亲人们的生日临近的日子里，他才感到真正的快乐：他可以借这个难得的机会来施展一下自己创造的才能。虽然口袋里只有少得可怜的几文钱，小黎曼每次总能够准备出一份使亲人们惊叹不已的礼物。第二年，在母亲生日的时候，小黎曼设计制作了一张可以永久使用的日历，来祝愿她老人家健康长寿。这件精致的、别出心裁的作品产生了预想不到的效果。小黎曼的创造天才受到全班一致的公认。从此以后，连最调皮的同学都来向他讨好，再也没有人来嘲笑和欺侮他了。

两年以后，祖父不幸病逝。在汉诺威已经没有别的亲人。小黎曼只好转学来到罗尼堡的预科学校。

在罗尼堡

小黎曼对学校的生活仍旧感到不适应。虽然从学校到家要步行好几十里路，不论刮风下雨，小黎曼一有机会就往家里跑。母亲担心他这样往返奔走会把身体累垮，不过小黎曼并不在乎。家里亲切的气氛温暖着小黎曼孤独的心。

在学校里，小黎曼遇到一个重大的考验。害怕遭人议论讥笑的怕羞心理，促使他要把自己的工作做得完美无缺，挑不出半点毛病。在数学方面他毫无困难。可是，在写作上要做到这一点却不是那么容易。所以一到写作课，他的精神就紧张起来。他每写一句都要反

复琢磨，精心推敲，常常写了划掉，划掉了再写。等到别的同学都已经交卷，小黎曼还在抱着头，冥思苦想。谁见到这种情景，都不由得要为小黎曼捏一把汗。其实，这种担心是多余的。小黎曼写作的速度虽然慢得使人难受，但是质量却是高超的。黎曼的文章，思路开阔，行文简洁，遣字造句，惜墨如金。粗看起来，他的文字平淡无奇，可是愈看愈耐人寻味。经过这段时间的刻苦磨炼，黎曼的写作技巧得到极大的提高。他后来的两篇伟大杰作，从内容到形式都达到炉火纯青的地步。其中的一篇，甚至连苛求的高斯也不得不承认，它晶莹剔透，完美无缺。

这时候，一位热心的希伯来语教师发现了这个天资聪敏、讨人喜欢的少年，特意把他接到自己的家里，和他一起研究希伯来语。要从事神职工作就需要精通这种语言。小黎曼知道自己说话结巴，羞于见人，而且对传道没有真正的兴趣，可是他仍然准备将来做一名传教士，因为这是父亲的意愿。孝顺的小黎曼不愿使父亲难过，而且这也是他帮助父亲把全家从经济困境中挣脱出来的最好途径。

当然，黎曼的才能在数学而不在神学，预科学校校长舒莫弗斯比谁都了解这一点。他特别允许黎曼可以自由使用他的私人图书馆，并且免修数学。有一次，他拿出勒让德所著《数论》让黎曼带回去自学。这是一部长达 859 页的巨著，论证严谨，内容艰深。有不少章节，连专家阅读起来也感到难懂。6 天以后，黎曼还书来了。舒莫弗斯大吃一惊。他十分清楚，对一般人来说，花上一年半载能把它读完就算不错。

“怎么，读完啦？”

黎曼轻轻地点点头，回答说：

“谢谢你。这真是一部了不起的著作。”

校长对学生的回答半信半疑，因为他自己阅读了近半年时间还留下一大堆疑问呢。他乘机向这位少年提出自己的问题。谁知黎曼对《数论》的内容了如指掌，就像这本书是他自己写的一样！

勒让德的著作使黎曼对素数之谜发生兴趣。在《数论》中勒让

德提出一个经验公式：任意给出一个正数 n，根据这个公式可以近似地求出小于数 n 的素数有多少个。后来，黎曼在柏林科学院 1859 年的《每月评论》上发表一篇短短 8 页的论文《论小于已给数的素数的数目》，来进一步改进勒让德的工作。他在论文中提出一个著名的“黎曼猜想”，这是今天向纯粹数学提出的挑战，如果不说是最引人注目的挑战，至少也是最引人注目的挑战之一。谁要是能证明或者推翻这个假设，不仅可以在数学史上享有不朽的荣誉，而且附带地可以解决素数理论，解决数论和分析中许多极端困难的问题。专家们一般都倾向于认为黎曼假设成立。1914 年英国数学家哈代证明：有无穷多个数满足这个假设。不过这还不够。无穷多个数还不是所有的数。它牵涉到一系列极其棘手的问题，仅仅用初等的方法是无法解决的。今天，这个假设吸引了愈来愈多的人们的注意。

在罗尼堡，吸引黎曼的大数学家不只是勒让德一个人。实际上，他是通过欧拉的著作来熟悉微积分和其他分支的。这有点使人奇怪，因为从欧拉入手来学习分析，在当时已经显得过时。后来的高斯、柯西和阿贝尔等人把分析大大向前推进。但是，这样的起步并不影响黎曼成为一位严格的分析学家。他的研究工作主要是受深刻的哲学思想的指引而不是追求形式的优美或玩弄公式游戏。不过，他的确从欧拉那里学到不少技巧。在这方面，欧拉无疑是举世无双的大师。

到黎曼从预科学校毕业的时候，事情已经十分清楚：他的才能用来宣传“上帝的真理”派不上什么用场，如果去征服自然，就大有用武之地。可惜，优柔寡断的性格妨碍黎曼果断地作出抉择。1846 年，黎曼考入格丁根大学。他选择语言学和神学作为自己献身的专业。

大学生活

当神职人员的想法时时在黎曼的脑海中盘旋，而格丁根大学丰富多彩的数学讲座更是深深地牵动着他的心。斯特恩的方程理论和

定积分，高斯的最小二乘法，……它们好像是根无形的丝线拉着黎曼身不由己地朝这些讲座走去。同自然界无比神妙的规律相比，关于天国的神话就显得贫乏而且索然无味。日子一久，黎曼终于忍不住向父亲说出自己真正的志愿和爱好，恳求父亲同意他改修数学。黎曼写一篇论文要字斟句酌，下极大的功夫，他写这封信丝毫不比写论文轻松。信发出以后，黎曼感到极度的紧张。他担心自己的决定会使父亲难过。可不是嘛，老黎曼本来指望儿子像自己一样做一名上帝的忠实仆人，而且他多么需要儿子来分担压在自己肩上的家庭负担！但是，慈爱的父亲了解孩子的禀赋，也理解孩子的心情，他完全想像得到，孩子为了这封信曾经作了多么激烈而痛苦的斗争。他不愿使儿子失望和难过，更不忍心儿子为家庭而葬送前程。他满腔热情地支持孩子的抉择，鼓励他安心学习，不要为家庭的困难操心。捧着父亲亲切的回信，就像捧着父亲一颗滚烫的心。黎曼的热泪不禁滚滚而下。通向数学宫殿的道路打通了！其实岂止黎曼，全世界都将永远感激乔治·黎曼这次难能可贵的支持！

在格丁根学习了一年，黎曼来到柏林。柏林大学讲授的内容更加新颖诱人。从雅可比那里，他学习力学和高等代数；从狄利克雷那里学习数论和分析；从斯泰纳那里学习近世几何；从比他年长3岁的爱森斯坦那里，他不但学到了椭圆函数，还得到相互切磋，增强了信心。在柏林，黎曼和爱森斯坦亲密得几乎形影不离。可是在学术上，两人常常争论得面红耳赤。对于理论应该怎样发展，黎曼和这位年轻的大师有一个根本的分歧。爱森斯坦好像当年的欧拉，坚持形式的优美，而黎曼主张从少数几条最普遍的原理出发，作最少量的计算来建立整个理论。黎曼一生坚持这种见解，并且构成他后来研究工作的重要风格。

这时候，黎曼的博士论文《复变函数一般理论的基础》的基本思想已经形成。他要从分析而不是从几何来定义复变量的解析函数，并且由此建立起整个复变函数理论。德国数学家约翰·本尼狄克·利斯廷（1806-1882）在1847年《格丁根研究》上一篇有关拓扑的

论文促成了它的实现。拓扑在本书第六章中曾经作过介绍。可是，在欧拉以后，这个主题几乎无人问津。利斯廷的文章重新燃起人们对它的兴趣。黎曼立刻看出，这种方法对于复变函数理论具有根本的重要性。创造性地利用拓扑方法来研究复变函数成为黎曼博士论文的一个重要特色。不过对黎曼来说，有了基本思想是一回事，要书写成文又是一回事，因为这是一项伟大的工程，从内容到形式他一心要追求尽善尽美的境界。

在柏林学习两年，1849 年秋天，黎曼回到格丁根。对纯粹数学，黎曼固然兴致盎然，不过关于物理定律的工作才是他的主要兴趣。通过数学去认识气象万千的物理世界使他心驰神往。进行物理探索的需要和它的成果成为黎曼数学研究的重要源泉和动力。黎曼博士论文中关于复变函数的思想正是他研究平面电流流动的时候受到的启发。在格丁根的最后 3 学期，他怀着巨大热情跟随高斯的老同事威廉·韦伯从事实验物理的研究。韦伯看出黎曼的科学天才，很快成为他的好朋友和顾问。第二年秋天，黎曼参加由韦伯、乌利治、斯特恩和利斯廷发起建立的数学物理班。他埋头在实验室里观察放电现象和静电效应，研究光环和气体流动，测定热传导系数，……呈现在黎曼面前的物理世界是一个无比和谐而又紧密联系的整体。许多现象根本无法用机械唯物论的哲学来解释，而牛顿绝对的时空观也显得过于笨拙。他深切感到在研究工作中必须有正确的哲学思想作为指导。他开始热心地参加各种哲学讲座，来了解先辈们对于宇宙的见解。黎曼后来在谈到自己的哲学心得时这样说：

“可以建立一套完全的严密的数学理论，它由单个质点的基本定律出发，发展到我们所知道的现实空间所发生的过程，这里没有引力、电力、磁力和热力的区别。”

人们常常根据这一段话来推断，黎曼在当时实际上已经反对物理学中“超距作用”那种古典理论而赞成现代流行的场论，因为在场论中，诸如一个带电质点周围空间的物理性质正是数学研究的课题。

历史上有不少大数学家写过有关物理科学的论文，可惜他们的

理论常常同科学家实际观察到的宇宙相去很远。黎曼比他们高明得多。他有一种敏锐的直觉，知道在物理上什么才是重要的。这种能力是从他大量的实验室工作和他同物理学家的频繁接触中获得的。作为伟大的数学物理学家，黎曼和牛顿、高斯、爱因斯坦跻身于同一行列。他们都从直觉上知道数学的科学用途。黎曼深刻的物理思想对今天的物理学家来说是完全合情合理的；可是在当时它显得过于大胆而且玄妙，以致除了像高斯这样有远见的大师，一般人都不能充分了解它的含义。直到爱因斯坦时代，才实现黎曼把宏观的物理世界几何化的梦想。

数学物理班的活动占去黎曼大量的精力，不过，他没有忘记自己的首要任务——博士论文。朋友们都在期待着它的问世。有几次，稿子眼看就要完成，又被他撕掉了重写。为了一个式子、一个符号不必说，即使是一个标点，他都要精心推敲。但是，尽管缓慢，进展是确实的。到1851年秋天，具有历史意义的博士论文终于完成了。

博士论文

1851年11月的一天，金色的阳光铺洒在格丁根天文台高斯的书房里。黎曼的论文《复变函数一般理论的基础》正端放在高斯的书桌上。冷静的高斯今天显得有点激动。他一会儿把整个身子靠在安乐椅上，右手轻轻拍打着桌子，微仰着头，闭起眼睛在沉思；一会儿推开椅子，在房间里踱来踱去。数学上的创造真正能引起高斯由衷赞赏的为数并不多，而这篇字迹娟秀的博士论文无疑是其中之一。多少年来，在数学园地上难得见到有这样使他赞叹不已的杰作了。一位名叫黎曼的青年以他独特的方式建立了整个复变函数理论，从而使他和柯西一起，作为这个重要数学分支的光荣创始者而载入史册。这是创造思想的伟大成果，也是严格论证的典范。挑剔的高斯对论文反复看了两遍，实在挑不出半点毛病，终于把论文一阖，轻轻地吐出一个字：

“好!”

数学王子决定见一见论文的作者。

三天以后，一位长着大胡子的身材修长的青年来拜访高斯。白发苍苍的高斯端详着客人清秀的面庞和他羞涩的神情，心里已经猜到几分。青年红着脸，轻轻地自我介绍说:

“打扰您了。我是……”

不等黎曼说完，高斯紧紧握住他的手说:

“欢迎你，年轻人!”

在书房里，高斯又把黎曼从头到脚细细地打量一番，并且高兴地告诉他：他自己多年来一直在计划写这方面的论文，可是由于种种原因，没有完成。现在黎曼出色地实现了这个愿望。高斯兴奋的样子，就像论文是他自己写的一样。

第二天，在递交格丁根大学教授会的正式报告中，高斯热情洋溢地对论文作了评价:

“黎曼先生提出的论文提供一个令人信服的证据，作者对所处理的主题的有关方面有透彻深刻的研究，同时证明，黎曼先生有一个创造性的、积极活跃的和真正数学的头脑，并且具有极其丰富的首创精神。文章清晰简洁，处处显得十分优美。大多数读者可能希望，作者最好写得更加详尽些。整个论文是一项实质性的工作，它不仅满足标准的博士论文的要求，而且远远超过了。”

这样高度的赞誉出现在高斯的正式评价中，是绝无仅有的。在高斯的最后岁月中，黎曼成了他心目中传奇式的形象。

一个月以后，黎曼的最后考试，包括论文的公开答辩，顺利通过。黎曼满心喜悦，对未来充满希望。在给父亲的信中，他这样写道:

“我相信这篇论文已经改善我的前景。……我希望学习如何能写得更快些和更流畅些，特别是如果我参加一些社交活动和有机会讲课的话。我的情绪很好。”

在信中，他还向父亲解释为什么没有积极去争取到格丁根天文台当一名助手，因为他感到，取得大学教授资格的前景已经不像以

前那样渺茫了。

意外的挑选

但是，黎曼高兴得太早了。攀登科学高峰的路径他熟悉，对现实生活中的“门道”却一窍不通。学术上取得一项成就并不意味着其他的困难都退避三舍。实际上，翘首期望的教授职位还在遥远的高处；仅仅为拿到私人教师的许可证，他还得奔走两三年！当年的高斯要幸运些，他有斐迪南公爵的慷慨资助；而黎曼，只能靠不定期来听课的为数寥寥的学生的学费勉强维持生活。在艰苦的日子里，他着手准备一篇题为《关于利用三角级数表示一个函数的可能性》的评职论文，争取获得大学讲师资格。这篇论文把函数的概念从欧拉“徒手画出的曲线”的框子中解放出来，给出今天称为“黎曼积分”的定义，为积分学指明了方向。

1852年，狄利克雷来格丁根度假。他在当时德国数学界的地位仅次于高斯。在柏林大学的时候，黎曼是狄利克雷的学生。可惜不善交际的黎曼和这位老师并没有任何私人交往。这一次，黎曼想利用这个难得的机会来征求他对论文初稿的意见。在朋友们的热心安排下，这两位高斯的继承人在格丁根大学的会客室里正式见了面。

“第二天早晨，狄利克雷和我一起呆了两个钟头，”黎曼写信给父亲，报告这次历史性的会见，“他给我指出评职论文中所应该注意的地方；看来我还得在图书馆里花许多时间来进行艰苦的研究。狄利克雷非常友善地和我一起把我的论文看了一遍——考虑到我们两人之间的差距，这是我所不敢企望的。我希望他以后会记得我。”

狄利克雷的确不会忘记。黎曼的谦逊和智慧给他留下难忘的印象。后来，他作了许多努力来改善这位青年的处境。

在格丁根期间，狄利克雷约韦伯、黎曼等几位朋友一起到郊外远足。白天，他们唱着歌，尽情地爬山，有时候到森林里采蘑菇。晚上，在古色古香的乡村小旅店里，大家痛快淋漓地阐发自己的科

学思想。有激烈的交锋，也有深入的研讨。从烟斗吐出的烟雾缭绕着飘忽不定的烛火，气氛热烈而欢愉。平时拘谨害羞的黎曼这时候简直像换了一个人。他的说话是那样机智明快，富于幽默感，不时激起朋友们的热烈响应和畅怀大笑。在无拘无束的讨论中，他的才智得到最充分的发挥。后来，黎曼在给父亲的信中说，这些看来和研究无关的活动，有时候比整天坐着看书更有收获。

黎曼对物理科学的兴趣愈来愈大。对数学物理问题的紧张思考使他的评职论文一直到1853年底才完成。但是要正式任命为讲师，按照规定还需要通过一次“演讲”。他得提出3个演讲题目供教授会挑选。有两个题目黎曼早有准备，可是，第三个题目——《几何的基础》，他的研究还没有最后完成。不过，他并不过于担心。按照“惯例”，教授会一般只挑选第一个题目，因为教授们知道这是演讲人最拿手的题材。所以他决定把《几何的基础》填在最后，希望不致被选中。谁知道，这一次情况完全不同。几何的基础是高斯思索了60多年的心爱的课题。一看到黎曼交上来的题目单，高斯毫不犹豫地在第三个题目下面打了一个“✓”。他很想知道，这位“具有极其丰富的首创精神”的青年在这样深刻的主题上持有什么样的见解。心想或许“不至于”，不料偏偏“刚巧是”！黎曼懊丧万分。命运好像故意和他作对。为了取得讲师的资格，他还得走一段艰巨的历程！

历史性的演讲

“既然得完成这个课题，就使我又一次陷于困境，”焦急的年轻人向父亲诉苦说。“当演讲的题目发给我的时候，我正沉醉在我的研究——把所有的物理定律统一起来——而无法摆脱。”

和高斯以及后来以爱因斯坦为代表的一代一代大物理学家一样，黎曼对于把所有的物理定律统一起来的理论有莫大的兴趣。黎曼发现，一向被认为是毫不相干的电、磁、光和引力之间存在微妙的联

系。由于种种原因，首先是由于健康上的原因，黎曼没有得到像麦克斯韦和爱因斯坦那样最后的成果，但是，他的工作无疑对近代物理的发展产生巨大的影响。

黎曼面临严峻的挑战。两项极端困难的研究同时进行。一面要完成演讲的论文，一面正进行着电、磁、光和引力之间联系的紧张研究，并且作为韦伯的助手，要做大量的实验。可是，在生活上他仍旧一贫如洗。当年的高斯在运气好的时候还能喝上一两杯加糖的咖啡；那么对黎曼来说，白开水就是他惟一的饮料。科学的历史告诉我们，人类思想的许多伟大成果正是从白开水加面包中酿制出来的。这大概有一个好处：节省时间。黎曼把自己关在房间里，好几个星期不露面。在他的书桌上，除了书籍和草稿，就是一杯白开水和几片干面包。为了怕受凉，他买不起帽子，就用一块旧布把头裹起来。天黑下来，点上一支蜡烛；实在困乏了，就靠在椅子上打一个盹；饿啦，就着白开水塞进两片面包。在这里，没有白天和黑夜的区别，工作连续进行。

谁也不能指望这样不顾一切地工作而不受惩罚。高烧，咳嗽，头疼欲裂，……他病倒了！后来在日记里，黎曼有这样的记载：

"……部分是由于我长时间紧张的思考，部分是由于我在这种天气里在屋子里呆的时间过长，我终于病了。我的老毛病开始发作，而且极其顽固。我无法继续工作。直到几个星期以后，天气好转，参加一些社交活动，我才开始感到稍微好一些。……"

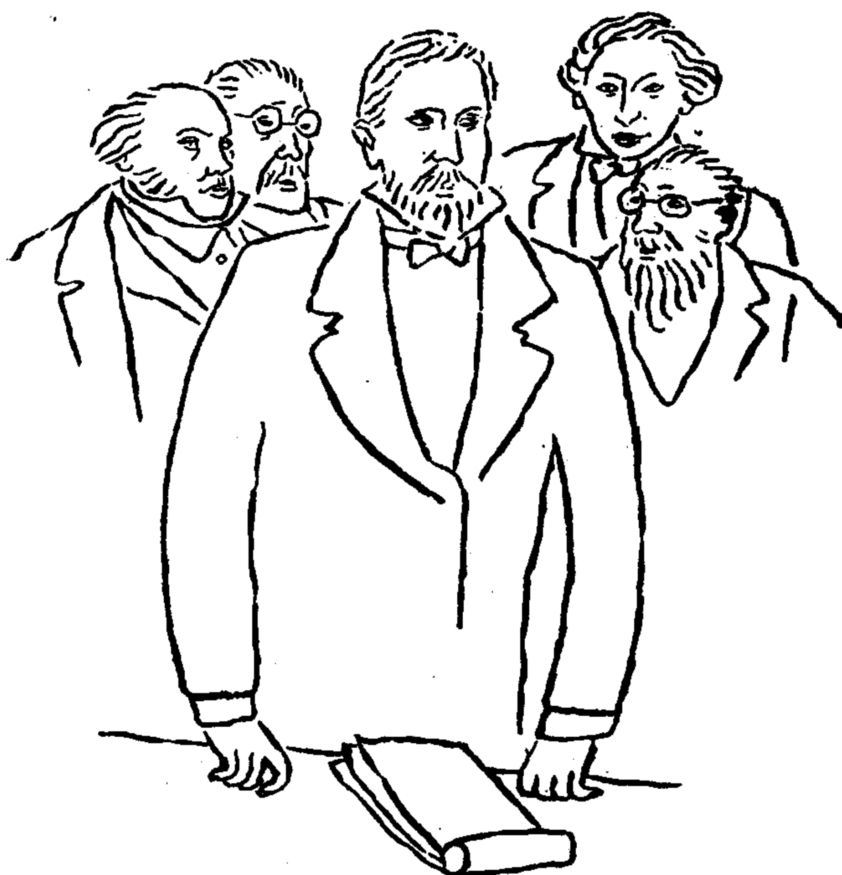
复活节后两星期，黎曼病体康复。他立即投入工作。经过几个星期的奋战，在圣灵降临节①前夕，具有历史意义的演讲稿完成了！

可是，好事多磨。要确定演讲的日期又遇到麻烦。演讲会的主持人高斯突然病重！大家担心他可能活不了几天。幸好经过医生抢救，高斯又一次奇迹般地战胜了死神。高斯打算把演讲安排在8月

① 基督教规定，每年过春分节月圆后第一个星期日（3月21日到4月25日间）为复活节，复活节后第50日为圣灵降临节。

份举行，因为健康的恢复需要一段时间。可是心情焦急的黎曼请求他无论如何不要把演讲拖到秋天。高斯理解青年的心情。他不顾自己身体的虚弱，在圣灵降临节后的星期五通知黎曼，演讲在第二天上午 11 点举行。

黎曼没有使高斯失望。更确切地说，黎曼的演讲大大出乎高斯的意料。演讲一结束，会场响起一片热烈的掌声，来庆祝黎曼几何的诞生。从教授会出来，年迈的高斯抑制不住内心的激动，一路上大声地向威廉·韦伯说明自己对黎曼提出的思想的最高评价。对高斯来说，这样的热情实在是罕见的。黎曼的演讲比任何药物更加有效地使高斯恢复健康。



历史性的演讲

为了使不大懂数学的听众也能听懂，黎曼煞费了苦心。但是，应该说，在1854年的原稿中，黎曼的几何思想表达得还不十分清晰。这一方面是因为他没有利用任何分析的技巧，同时也与文章开头部分的哲学议论有关。1868年，黎曼逝世以后第二年，这次历史性的演讲以《关于作为几何基础的假设》为题正式出版，立刻在数学界激起巨大的反响。世界各国的数学家纷纷争先恐后地来充实和推广黎曼所概述的革命性的思想。为迎接相对论诞生所必需的数学工具准备就绪了！

黎曼几何

黎曼以前的几何学家是把空间作为一个整体来研究的。无论在欧几里得几何还是罗巴切夫斯基的非欧几何，都是在整个空间中先确定有哪几条公理成立，然后从这些公理出发，推导出其余的命题。根据所选的公理不同，就形成不同的几何体系。这样，就十分自然地提出一个问题：这些公理是根据什么来选取的呢？如果回顾一下历史上对欧几里得平行公理的长期争论，问题的实质就是，在物理空间中，究竟什么是我们可以确信的。至于一向被信奉为神圣的“永恒的真理”的欧几里得公理，在黎曼看来，与其说它是不证自明的，不如说是经验性的。实际上，它只符合于一张薄纸上那种小范围的实验，而且连纸面上的皱折和纸的边缘部分也不适用。黎曼还认识到，在几何证明里，由于感觉上的原因，我们可能会不自觉地假定一些类似欧几里得平行公理那样不是显然可以接受的事实，譬如说，认为存在一个直线三角形，它的面积大于任何给定的面积等等。因此，黎曼决定采用一种截然相反的途径来研究空间：从研究空间的局部性质入手，利用分析方法而不是几何的方法来推导出一切必然的结论。

高斯在具有划时代意义的《关于曲面的一般研究》中提出了一个全新的概念：一张曲面本身就是一个空间。不过他当时考虑的只

是三维空间。黎曼把这个概念推广到 n 维空间。在古典的解析几何中，平面上的坐标是两个数（x_1，x_2），它代表着平面上的一个点；立体中的坐标是三个数（x_1，x_2，x_3），它代表着三维空间中的一个点。现在，黎曼把有序的 n 个数（x_1，x_2，…，x_n）看做是 n 维空间（黎曼称它为 n 维流形）的坐标，它代表着 n 维流形上的一个点。所有这些可能的点的集合就构成 n 维流形本身。当这 n 个数连续变化的时候，对应的点就遍历这个流形。

黎曼认为，要判定空间（流形）的性质，关键在于两点间的距离。从甲地到乙地，随着它们之间地形的不同，所走的路程是不同的。平面上两点的距离是直线距离；球面上两点的距离就是大圆的劣弧长了。因此，黎曼首先定义在 n 维流形上无限接近的两点间的距离。只要定义距离公式中的系数一确定，“空间”就确定了。空间中相邻两点间的距离用这种方式来定义的就称为黎曼空间。

黎曼的演讲使几何的思想发生根本的变化。他澄清了人们关于空间的概念，至少是澄清了数学家们所研究的“空间”的概念。对现代数学家来说，空间不是别的，它是某一类有序的 n 个数（x_1，x_2，…，x_n）的集合所构成的流形，数学研究的对象就是流形。如果说罗巴切夫斯基建立非欧几何的时候，还只是一种逻辑上的推断，并不了解它所反映的空间形式是不是实际存在，那么，对黎曼来说，情况就完全不同。黎曼的研究表明，把某一种几何或某一种空间看做是我们感知的惟一的空间模式，是错误的。实际上存在数目无限的空间和几何，它们可以分别应用于古典力学、相对论、规范场论等特殊的物理对象。和当时的绝大多数几何学家不同，黎曼从大量的物理研究中认识到，离开物质的空间是不存在的。要了解物理空间的真理，必须把物质和空间联系起来。这个思路自然就引导到相对论。由于物质的运动随着时间而变化，因此，空间的形式也随着时间在变化着。在这里，通常的欧几里得几何法则是不成立的。

黎曼的演讲使微分几何发生一场革命。整个几何从此呈现出全新的面貌。绝对空间的概念失去了最后的领地。统治着 19 世纪物理

学的“绝对观念”的丧钟敲响了！

为了人类的幸福

评职演讲顺利通过，黎曼正式被任命为讲师。1854 年 10 月 9 日，他在给姐姐伊达的信中欣喜地谈到第一次大学讲课的成功：本来以为只有两三个学生来听课，结果居然来了 8 个！他还写信给父亲谈到自己的进步：

“我能够正常地上课了。上课刚开始时的羞怯和拘束愈来愈少。我已经习惯于更多地想到学生而不是自己。从他们的表情中我可以看出，应该继续讲下去呢还是需要把问题作进一步的阐明。”

第二年高斯病逝。狄利克雷继承高斯成为格丁根大学数学教授。黎曼的朋友们敦促学校当局提升黎曼为副教授。但是学校的财政有困难。不过最后总算同意支付他相当于一年 40 英镑的固定薪金，这比不固定的三四个自动来听课的学生的酬金要稍好些。不久，操劳一生的父亲和妹妹克拉拉先后病故。黎曼的 3 个姐妹从魁克彭搬到不来梅和弟弟住在一起。弟弟是当地邮政局的职员，他的收入比两袖清风的数学家优厚得多。

贫困和不幸沉重地压在黎曼的身上。但是，只要有最低的生活条件，他就不会被绝望所击倒。纯粹数学和数学物理方面大量开创性的工作带给他无限的幸福和欢乐。对莱顿瓶的放电现象、诺比利色环和电动力学的数学研究耗费了他大量的精力；长期通宵达旦的紧张工作使他赢得阿贝尔函数、超几何级数和微分方程等领域的重大进展。

1857 年，黎曼终于当上了副教授。他的薪金提高到一年 60 镑。可是，还没有等他喘上一口气，灾难又一次降临：弟弟因病猝然去世。赡养 3 个姐妹的担子一下子落到黎曼的肩上。面对这么一道简单的算术题，连黎曼这样的大数学家也一筹莫展。算来算去，一个月的生活费每人只能摊到 1 镑 5 先令！

工作上过度的劳累和营养严重不良大大损害了黎曼的健康。不过，丰富的食物固然诱人，真诚的亲情更是无价之宝。眼看着黎曼一天天消瘦下去，姐妹们焦急万分。虽然他们自己常常饿得头昏眼花，姐妹们饿着肚子给黎曼买来鸡蛋和牛奶。这当然不能长期瞒着黎曼而不被发觉。他只好用“绝食”来制止姐妹们的自我牺牲。家里的生活虽然贫困，大家却毫不忧伤。姐姐伊达充满感情的朗诵和妹妹海伦夜莺般的歌声使全家洋溢着和谐欢悦的气氛。姐妹们的无私关怀和热情鼓励给黎曼增添了巨大的力量和信心。

1859 年，狄利克雷逝世。他生前曾经大力帮助过奋斗中的黎曼，并且高度赞扬他的工作。狄利克雷的评价和黎曼急速上升的声望促使政府提升黎曼为格丁根大学的数学教授，成为狄利克雷的继承人。这时候他刚刚 33 岁。为了减轻黎曼的困难，当局请黎曼像当年的高斯那样住进格丁根天文台。黎曼的声誉青云直上。世界各国的学术团体，包括英国皇家学会和法国科学院，纷纷以接纳黎曼做他们的成员为莫大的光荣。一时间，他获得了一位科学家所能享有的全部荣誉。第二年，他来到巴黎访问，结识了许多重要的数学家。这一年，由于他动手写作著名的“巴黎之作”——《论热传导中的一个问题》而成为数学物理史上值得纪念的年份。文章进一步考虑他关于几何的思想，对 1854 年演讲的内容作了技术性的加工，使今天成为相对论基础的这个数学工具更臻完善。

1862 年 6 月，黎曼和爱丽丝·高絮小姐举行婚礼。爱丽丝是黎曼妹妹的朋友，风姿绰约，温文尔雅。黎曼对爱丽丝早有爱慕之心。可是怕羞的性格，特别是窘困的经济状况，迫使他把自己的感情深深埋在心底。结婚才一个月，黎曼得了肋膜炎。肋膜炎还没有痊愈，又染上了肺病。在朋友们的多方活动下，促成政府资助黎曼到气候温和的意大利疗养。黎曼和爱丽丝一起在意大利度过一个愉快的冬天，兴致勃勃地参观了意大利城市的许多艺术珍藏。可是在归国途中，在步行通过边境山区的深深积雪的时候受了凉，回到格丁根，他病得更重了。

翌年8月，黎曼又来到意大利。先在比萨逗留了一段时间，他的女儿，取他姐姐的名字伊达，在这里降生。那年的冬天特别冷，阿诺河全部冰封了。5月，他来到比萨郊区的小别墅，他的最后一个妹妹海伦在这里因病去世。他自己的病情也因为出现黄疸而更加复杂了。由于健康的关系，他只好婉言谢绝比萨大学的教授聘请书。格丁根大学慷慨地延长黎曼的假期，使他可以在意大利安心过冬。他来到滨海城市里窝那和热那亚疗养，但是病情毫无起色。他决定回国。10月，他回到格丁根，等待着他的是又一个可怕的冬天。

尽管病情日益恶化，只要有力气，他就奋力工作。他多次想到柏林去和戴德金讨论有关自己还没有完成的工作。可惜身体过于虚弱，这个愿望没有实现。他在数学、物理学、哲学和心理学等领域留下了大量未完成的手稿，其中包含着许多独特的创见和极珍贵的内容，它们再一次勾起人们对他过早逝世的无限痛惜。他渴望到阳光灿烂的意大利去，最后在鲜花盛开的萨拉斯卡度过他弥留的日子。戴德金这样记载着：

“黎曼的体力很快衰竭下去；他意识到自己的日子已经不多。临终前一天，他在无花果树下工作。环绕着他的是光荣的里程碑。他的心灵充满喜悦。……没有挣扎和痛苦，他的生命之火渐渐熄灭。他好像在饶有兴味地注视着肉体和灵魂的分离。……”

爱丽丝一直守在旁边。她感到他的手在慢慢变凉，一颗高尚纯洁的心停止了跳动。这是1866年7月21日。终年仅39岁。

英国著名天文学家爱丁顿爵士说：

“像黎曼这样的几何学家可能已经预见到真实世界的更为重要的面貌。”

为了认识这个世界，黎曼耗尽毕生心血为我们创造了崭新的概念和强有力的方法，虽然他自己没有来得及看到这种概念和方法的最辉煌的成果——相对论——的诞生。但是，他足以感到自豪。正如意大利的朋友们在他的墓碑上这样镌刻着：

“……一生的活动都是为着热爱上帝的人们的幸福。”



庞加莱

(1854—1912)

你若想从随机的相互作用中得到最大的机会，你就必须经常在脑子里反复思考这些东西。我想庞加莱讲过这种话。

——迈克尔·阿蒂亚①

可以毫不夸大地说，拓扑学作为科学的分支，是在19世纪由庞加莱奠基的。

——谢尔盖·诺维可夫②

有生理缺陷的孩子

位处法国东北，不乏美景的历史名邑南锡是座小城。1854年4月29日，就在小城南锡，诞生了一位彪炳千古的大数学家——亨利·庞加莱。

亨利的父亲，莱昂·庞加莱一生从医，是南锡大学生理学教授。作为一位名医，他还是医师公会成员，公务繁忙。亨利的母亲是位贤慧的女性。她聪明机敏富有灵气。小亨利出生不久，她察觉婴儿手脚活动不大正常。这使母亲感到不安。亨利有了妹妹阿兰以后，母亲不再做别的事，集中精力悉心照料两个孩子。在循循善诱的母

① 迈克尔·阿蒂亚（1929- ）是英国数学家，在几何、拓扑和分析上均有重大建树，对当代数学有重要影响。1966年获菲尔兹奖。

② 谢尔盖·诺维可夫（1938- ）是俄罗斯拓扑学家，1970年获菲尔兹奖。

亲教育下，小亨利的智力发展很快。但是他仍然没有摆脱身体不灵活的阴影。仔细观察分析之后，父母确信，这是亨利的运动神经调节官能很差的缘故。

上学以后，人们看到小庞加莱左右两只手都能写字画画，可是写的字，画的画，都不好看。妈妈感觉，儿子手脚不灵便的毛病恐怕没有希望改掉了。5岁时，雪上加霜，小亨利染上了白喉，更损害了他的神经系统。喉咙麻痹的症状延续了9个月才逐渐缓解。后来发现，亨利的视力也受到影响。儿子的健康问题成了母亲的心病。做医生的父亲也无能为力。患白喉以后很长一段时期，亨利因虚弱而常常发蔫，胆小怕事。人们看到，他不再参加小男孩间粗野的打闹；也很少和妹妹及街坊小朋友一块儿玩。他的娱乐就是自个儿看书和跳舞。1859年达尔文发表《物种的起源》。可能受到达尔文学说传播的影响，庞加莱对大自然的演变和动植物的进化发生了浓厚的兴趣。他一直很喜欢动物。如果美国女生物学家卡森的《寂静的春天》早出版100年，庞加莱可能会参加动物保护协会。不料他一次摆弄来复枪时误伤了一只小鸟。这使他十分痛苦和愧疚。除了在战争时期强制的军事训练，他再也不摸那些火器了。

妈妈发现，阅读时小亨利看得很快。相当厚的一本书，两天他就看完了。更令人吃惊的是，他还能把书中故事讲出来；甚至可以说出那些事印在书中哪些页上，真可谓过目不忘。这使妈妈又惊又喜。继续观察得知，经过很长时间的往事，他也能清晰地回忆起来。后来到高年级，他的视力不行，看不清黑板上的板书而无法记笔记。他就聚精会神地谛听老师的讲解，边听边想，久而久之，庞加莱领悟和记忆的能力越练越强。父母惊喜地看到，他的空间记忆和时间记忆，或者视觉记忆和听觉记忆都非同一般。

一方面，亨利的运动神经调节官能差，造成手脚活动不灵便；患白喉后视力低下，他是个有生理缺陷的小孩。另一方面，他是个聪明的孩子，有不寻常的记忆，可算是一种异禀吧。这让妈妈既担忧又有期待。父母不得不经常提醒他多活动身体增强体能。于是他

每每独自一人手舞足蹈；甚至自编自演过一出诗剧。他娱乐之余常帮妈妈干家务，但是很少做功课。好在成绩单表明亨利学习优良，让家长放心。事实上，除了体育与美术，其他各门功课他都感觉轻松。9 岁时，庞加莱在文学课上写的一篇短文，因为立意不俗，形式新颖，受到老师表扬，被称赞为“小小杰作”。

走上追求真理之路

小庞加莱慢慢长大，数学课程度渐渐提高，他对数学的兴趣也越来越大。几何学有好看的图形和美妙的思路让大家喜悦。别看庞加莱笨拙的手画图不灵，几何课上他可风光了。无章可循的几何题，常使同学们抓耳挠腮；很少画好图形的庞加莱却能三言两语就给出问题的解答。这是怎么一回事？难道真的“几何学是利用不正确的图形来进行正确思维的艺术”？老师和同学惊奇之余都佩服庞加莱的数学本领。他自己更越发喜欢数学了。到 15 岁左右，庞加莱放学回家，常常在屋里屋外来回踱步。开始妈妈莫名其妙，后来才知道，那是他在思考数学问题。解答想好了，他一气呵成写出来，真是十分惬意的事。他似乎已经迷上了数学，以至于经常忘记吃饭，使母亲非常不安。父亲也不止一次告诫：不吃早饭有损健康，对孩子成长十分不利。其实亨利并不是不好吃，只是太喜欢想数学问题了。成年以后，工作之外，庞加莱表现出来的“心不在焉”更严重了。

1870 年爆发了普法战争。庞加莱年龄小，体质弱，没有去服兵役。他后来加入战地巡回医院，协助父亲工作。俾斯麦早已蓄谋夺取法国的欧洲霸权，建立德意志帝国。德国入侵者很快占领了南锡，并将巴赞元帅率领的法军野战兵团围困在北面不远的梅斯。普军有备而来，法军屡屡失利。10 月下旬巴赞在梅斯投降了。对糟糕的局势，老百姓无可奈何。寒冬来临，亨利陪着妈妈和妹妹逃难去外婆家。姥姥和姥爷住在阿兰瑟。亨利的记忆中，他小时在外婆家的生活是美好的。可是娘儿三个饥寒交迫下，越过一个个沦为焦土的村

镇，到达阿兰瑟时，看见的只是一片残垣断壁。在侵略者铁蹄的蹂躏下，美好家园已经不复存在。外婆家被洗劫一空，连不值钱的杂物都没有剩下。国难家仇使少年庞加莱成为一名爱国者。普法战争以法国失败告终。1871 年 5 月签订法兰克福条约。德国并吞了阿尔萨斯及洛林的大部分，连梅斯都划归了德国。后来庞加莱读到法国作家都德的《最后一课》，想起这穷兵黩武烧杀抢掠的一幕，仍然无比愤慨。

1871 年底，庞加莱报考著名的巴黎综合工科学校。入学考试时主考官听说庞加莱是个数学奇才，把考试推迟三刻钟，精心选编了一道难题来考他。庞加莱出色地解答了这道题，得到数学的最高分。他的体育成绩不佳，更麻烦的是绘画被判零分。按规定得零分的考生将被淘汰。由于庞加莱的数学名声，淘汰他可能如同 40 多年前淘汰伽罗瓦，校方将招致社会舆论的谴责。学校当局不愿重蹈覆辙，最终破格录取了他。

进入巴黎综合工科学校以后，庞加莱多次听到人们议论学校在 20 年代两次把伽罗瓦拒于门外的事。年轻的伽罗瓦提出置换群与数域概念，建立伽罗瓦对应，彻底解决了代数方程根式解的千古难题，却在不足 21 岁时死于非命。这样令人扼腕的事，在庞加莱非凡的记忆中更是无法磨灭。于是他发奋钻研约当的著作和李群思想；继承伽罗瓦的研究。这不仅使庞加莱看清群论在研究方程中的作用。更认识到伽罗瓦理论的深远的意义。坐标法建立形与数的基本对应，伽罗瓦理论则揭示了几何与代数、数论之间深层的内蕴关系。庞加莱一向喜欢革新思想。罗巴切夫斯基等人的非欧几何，柯西与黎曼的复变函数，同样是他所关注的。虽然在物理实验操作上他稍逊一筹，但对理论物理，比如拉格朗日等人的分析力学，拉普拉斯的天体力学，傅里叶的热的解析理论，尤其是麦克斯韦的电磁学说，却都饶有兴趣。重视物理，庞加莱也就特别重视对与物理联系密切的微分方程的学习。

心智早开，视野广阔，庞加莱长大了。他对母亲的理解也加深

了。妈妈长年操持家务，教育子女，任劳任怨。她还总担心孩子的健康，又为他们的进步高兴。她无言的举止，慈祥的目光，似乎在说：上帝是公正的。庞加莱想着自己的先天不足，深知不能恃才傲物，还要注意自己品德操守的磨炼。他虽然体育运动落后，不能和同学们在操场上同乐；但是他与人为善，坦诚正直，这使他在班上颇得人心。他拙于绘画，同学们特为此开了个善意的玩笑。在一个年终，他们举办了一个“庞加莱艺术作品展览”，用希腊文对每件展品作出说明。结果出现了一些令人捧腹的“画虎类犬”的笑料。

1875 年，庞加莱从巴黎综合工科学校毕业。他打算当一名工程师，又进了高等矿业学校。他认真学习工程技术课程，注意体魄锻炼，以使自己具备工程师应有的素养。一次实习中，一口矿井瓦斯爆炸并引发大火。庞加莱奔向浓烟滚滚的井口，顾不得想什么，跟着救生员们匆匆下井，去营救遇险矿工。热浪烟尘中他没有退缩。他们冒着生命危险奋勇抢救，也没有避免悲剧发生。这次灾难造成 16 名矿工丧生。庞加莱直面遇难矿工的遗体，沉思生与死的哲理，久久不能平静。

在矿业学校，庞加莱认识到工程技术研究离不了数学与物理，特别是微分方程。于是他一有空闲就研究微分方程。对微分方程通解的一项研究，是庞加莱数学创造的锋芒初试。1878 年庞加莱向巴黎科学院提交了关于微分方程的第一篇论文，并为此于 1879 年 8 月 1 日获得博士学位。这导致他职业前途改变。他不冷漠应用科学，也不轻视工程技术。可是好像命中注定他不能成为工程师。1879 年他应聘为卡昂大学数学分析讲师。庞加莱以他超凡的天赋，开阔的心胸，抱着对真理的执著的追求，走上了职业数学家的道路。

漫漫求索

由于在微分方程研究中成绩卓著，1881 年庞加莱被聘为巴黎大学教授。同年他与路易丝·保兰结为夫妻。巴黎大学安排他讲授力

学与物理学。课余庞加莱继续研究微分方程。所谓微分方程，是含有未知函数的导数的等式；解微分方程就是求出未知函数①。微分方程与它的解——函数，密切相关。庞加莱研究微分方程引起他寻求的自守函数，是三角函数与椭圆函数的推广。三角函数的周期性，是一种平移变换下函数的不变性。椭圆函数有两种周期，它在两种平移变换下不变。庞加莱要找的自守函数，是在某一类分式线性变换下不变，而这类变换构成一个群。他找到的自守函数中有一类被他称为富克斯②函数。庞加莱求索富克斯函数的经历，是一个颇为典型的数学创造过程。最初，有两周以上的日子里，他每天研究一两个小时均无进展，以至怀疑这种函数的存在性。一天晚上，他反常地喝了一大杯未加牛奶和白糖的所谓黑咖啡，久久不能入睡，各种想法纷至沓来。他终于恍然大悟，明白确实存在要找的函数。次日，从与椭圆函数相类比出发，他顺利地构造出一种由超几何级数构成的富克斯函数，它们在相应的富克斯变换下不变。后来因地质考察中断了这项研究。一次考察的出行途中换乘公共汽车，在庞加莱的脚迈上汽车踏板的一刹那，一种想法突然闪现在他的脑海：上次的富克斯变换与一种非欧几何变换等价。回到卡昂通过推理，他证明了换车时产生的想法是正确的。但在更进一步的研究时遇到了障碍。无奈之下他去海滨休息几天。一天早晨，庞加莱沿着海边峭壁漫步，海风拂面清新宜人；一种想法又蓦地浮上心头：一种二次型的数论变换与那非欧几何变换也是等价的。再回到卡昂后，庞加莱仔细分析二次型的例子，终于看出，存在不同于以前由超几何级数构成的另类富克斯函数。往下任务就是构造新的富克斯函数。他有条不紊地解决了所有外围的问题。核心难题的解决不能指望一蹴

---

① 比如，对未知函数 $S=f(t)$ 和常数 a，$\frac{dS}{dt}=aS$ (1)
就是一个很简单而极重要的微分方程，而函数 $S=f(t)=f(0)e^{at}$ 就是微分方程(1)的一个解。

② 拉撒路·富克斯（1833-1902）是德国数学家，早年研究几何与数论，后对微分方程理论有重要贡献。

而就。因服兵役又中断了研究而在外面四处奔波，一天庞加莱穿过一条大街时，挡住他通向胜利终点的难题的解答，突然出现在他脑海中。他警觉地停止思考，以免与疾驶过来的马车相撞。实际上直到服役结束，他才得以全面展开研究。由于素材齐备，后期工作并无多大困难。他关于富克斯函数的第一篇论文终于完成，并在 1882 年发表。

在这篇论文写作过程中，“有意识的研究——潜意识的活动——有意识的研究”，这样的思维运动形式，清晰可辨。从中可以看出，研究不会一帆风顺，认识的飞跃需要积累。

虽然庞加莱的自守函数论文并未立即为数学界普遍理解，还受到克罗内克等人怀疑和指责；但是历史表明，庞加莱的自守函数理论揭示了分析学与几何、代数和数论的内在联系，表现了数学的统一性，对现代数学影响巨大。后来庞加莱提出多复变函数，而有多复变自守函数、自守形式和模形式理论的发展。20 世纪末维尔斯证明费马大定理时，就运用了模形式理论。

独辟蹊径

1877 年美国著名数学家希尔（1838-1914）发表文章论证月球近地点运动具有周期性；因其论证理由不充分而受质疑。庞加莱证明了希尔推理中的收敛性，从而完善了希尔理论。希尔理论遂受赞扬而获奖。庞加莱由此对天体力学，特别是三体问题，发生了浓厚的兴趣。地球与日月的关系就是典型的三体问题；数学上它是含有九个方程的微分方程组，在一般条件下无法求其精确解。庞加莱认识到，研究三体问题必须另辟蹊径。他想：人们关注地球与日月关系，是担心地球与月球碰撞；或者地球不断靠近太阳；或者地球不断远离太阳。如果发生这类情况，后果不堪设想。杞人忧天并非毫无道理。假如求出精确解，也就是得到天体位置随时间变化的公式，就能知道会不会发生那些灾难。但是这并不是说要得到结论非有精

确解不可。庞加莱进而明确：要放下精确解这个包袱，设法了解天体轨道的性质和形态。于是他走上用几何方法从整体上把握解的性质形态，建立微分方程定性理论的道路。

1887 年瑞典国王奥斯卡二世宣布悬赏征求著名 N 体问题的解答。$N=2$ 时的二体问题前人早已解决。$N=3$ 时的三体问题是人们关注已久的焦点。庞加莱将微分方程定性理论应用于三体问题研究，在 1889 年应征论文中运用渐近展开与积分不变性方法，深入研究了轨道在奇点附近的性质形态。尽管庞加莱没有在传统意义上解答 N 体问题，三体问题确实取得重大突破，太阳系的相对稳定得到确认。维尔斯特拉斯、埃尔米特和米塔-列夫勒组成的评审团高兴地把奥斯卡奖——2500 瑞典克朗和一枚金质奖章，授予庞加莱。维尔斯特拉斯在给米塔-列夫勒的信中写道："您可以告诉您的国王，这项工作不能视为悬赏征解问题的完美解答。然而它具有这样的意义，它的发表在天体力学上开创了一个新时代。因此陛下预期的公开竞赛的目的，可以认为达到了。"作为应征论文的引申，庞加莱后来完成的三卷《天体力学的新方法》闪耀着定性的拓扑思想光辉，开创了天体力学的新纪元，对数学和自然科学作出了重大贡献。

拓扑创新

庞加莱对自守函数与微分方程定性理论的卓越研究获得国内外一些同行的好评。1887 年他当选为法国科学院院士。但是他清醒地看到，许多问题远未完善解决。回顾自己 10 多年的数学研究，他觉得，他能正确分析判断，往往是依据自己的直觉。经常是长时间冥思苦想不得要领；那直觉顿悟，却似"神来之笔"，难以预期。他意识到，上天赋予他超常的直觉与记忆，他自然要为数学科学尽心竭力。

庞加莱研究的主要领域，是包含微分方程在内的分析学。其核心观念是连续性。他看到，与连续性相关的许多难题的化解，都离

不了“位置分析”，就是拓扑学。我们在欧拉那章说过，拓扑学是研究图形在双方单值连续变换（拓扑变换）下不变性质的几何学。两个图形若为同一拓扑变换下的象与原象则称同胚。拓扑变换也称同胚（映射）。比如，圆周与任何多边形的周线同胚，球面与棱柱、棱锥和一切凸多面体的表面同胚。但是它们与形如车轮内胎表面的环面不同胚。可见同胚这种等价关系比欧几里得几何中全等、相似等许多等价关系包含的对象广泛得多。犹如人体生理学适用于不同性别、年龄、种族、国籍的广泛人群，拓扑学也适用于广泛的各种研究对象。所以人们从各种不同的领域提出拓扑学问题。

受物理学影响，庞加莱于 19 世纪 80 年代初在数学上提出向量场概念。他的拓扑学研究先是与向量场，也就是微分方程、天体力学，联系在一起。后来考察代数函数的几何结构，庞加莱更加明确，系统地研究高维图形的拓扑学是必要的。他看到欧拉、高斯尤其是黎曼有很多重要的拓扑思想，但是专门的拓扑学论述太少。他觉得刻不容缓了。从 1892 年-1893 年他开始撰写并发表拓扑学论文。1895 年更发表了长达 121 页的论文《位置分析》，堪称早期拓扑学的经典。但是数学界并没有他期待的热烈响应。这与庞加莱常以直觉立论，忽视细节，欠缺严密逻辑，造成读者疑惑费解有关。庞加莱并不气馁，继续拓扑学研究。在 1899 年-1904 年间他又陆续发表了 5 篇补充报告，充实和深化以前的研究。在这一系列著作中，庞加莱创立用剖分研究图形的基本方法；提出同调群、基本群等重要的拓扑不变量；推广简单多面体的欧拉定理，建立高维图形相应的欧拉——庞加莱公式。他还提出一系列问题，包括至今仍未解决的著名的庞加莱猜想。这些结果构成了组合拓扑的主要内容。普遍认为，在 1935 年波兰数学家胡勒维支（1904-1956）定义高维同伦群以前，代数拓扑学的发展完全基于庞加莱的思想和方法。

庞加莱深知拓扑学的重要，在他的著作中反复强调:“拓扑学是一门科学，它不仅使我们认识通常空间中几何图形的定性性质，而

且使我们也能去认识高于三维的空间中几何图形的定性性质。在三维空间中，拓扑学是近乎直观的。反之，对于高于三维的空间，拓扑学就显得难以捉摸了。为了克服这一点，需要对这门科学的极端重要性确立坚定的信念。如果这种重要性尚未为人们认识，那实在因为人们对此还没有仔细想过。”100 年后人们认识有所提高。今天我们可以在中学课本中读到简单多面体的欧拉定理。那就是庞加莱所说“通常空间中几何图形的定性性质”。通过它，我们明确认识有五种并且只有五种正多面体。利用它，我们可以了解 20 世纪后期发现的富勒烯家族中 C_{60} 与 C_{70} 的分子构形，算出每个 C_{60} 与 C_{70} 多面体构形中包含的五边形与六边形的数目。对于高于三维的空间中的图形，庞加莱怎样建立欧拉——庞加莱公式，那确实难以捉摸。高维图形失去直观难以想像。但是拓扑学思想深刻，概念普遍和应用广泛，使很多数学家知难而上。一旦投身其中，他们认识到拓扑学的重要性，就会为它的发展与应用奉献出毕生的心血。庞加莱创建拓扑学百年来，引导了一大批优秀的数学家，已经把拓扑学建设成一个庞大的科学体系，对整个数学产生了深远的影响；还直接促进了一些科学技术领域的创新与发展。如 1983 年诺贝尔经济学奖得主，法国数理经济学家德布鲁利用微分拓扑帮助他实现“一般均衡理论”研究的突破。方兴未艾的拓扑学尚有待年轻人将它向前推进。



需要对拓扑学的极端重要性
确立坚定的信念

沉思物理

声名显赫的数学家庞加莱在巴黎大学长期讲授力学、物理或者数学物理、天文理论。自然课、物理课，他从小喜欢。庞加莱的物理课教得很热火；年年变换，不断更新。他给我们留下了许多授课讲义：基础力学、几何光学、热力学、电磁学等等。至于数学物理、天文理论，他一向关注，成就一流。

数学物理，简单说，是研究物理的数学；它包含偏微分方程、积分方程等方面。偏微分方程是古今数学中复杂艰深的一大门类。其中有许多庞加莱感兴趣的问题。只是他觉得一时难有重大进展。历史表明，后来促使偏微分方程研究发生长足进步的新思想尚在孕育中。即便如此，他对偏微分方程理论仍有重要贡献。庞加莱在线性算子、位势理论的工作都是奠基性成果。他对积分方程也深有研究。

20 多年物理教学研究中，庞加莱对很多物理问题发生了浓厚的兴趣。1858 年普吕克尔发现的阴极射线究竟是什么？庞加莱猜想它是由某些粒子组成。可惜他没有实验研究，未能证实自己的猜想。1895 年德国物理学家伦琴做阴极射线实验时又发现了一种未知射线，称之为 X 射线。它穿透性强且使照相底片感光。伦琴把发现 X 射线的通报连同第一张 X 射线照片，就是他夫人手的影像，于 1896 年元旦寄给科学同行。庞加莱收到伦琴的新年礼物倍感振奋；他认为伦琴的发现有力地支持了他的观点。他带着伦琴的礼物去参加巴黎科学院的周会，向大家展示了伦琴夫人手的指骨和清晰可辨的戒指。科学家们关注的还是学问。物理学家贝克勒耳一个劲儿地追问庞加莱："射线是从管子的哪部分发出的？"庞加莱觉得 X 射线是由阴极射线未知的粒子流轰击出的产物。他就回答说："射线好像是从管子中与阴极相对的区域发出的。这部分玻璃发荧光了。"这使贝克勒耳想到 X 射线可能与荧光有关；次日立即试验，考察荧光物质可否发出 X 射线。他一连几周实验研究，最终发现了重元素铀的

放射性。后来著名科学家居里夫妇继续研究，经过艰苦努力，于次年7月和12月先后发现了放射性更强的元素钋和镭。在此期间，英国物理学家J. J. 汤姆孙对阴极射线进行一系列实验研究后，在1897年4月30日认定它是带负电的粒子流，证实了庞加莱的猜想。汤姆孙称这种粒子为电子。电子是人类发现的第一种亚原子粒子。X射线、放射性和电子的发现，开辟了科学的新纪元。庞加莱为此兴奋不已。他欢呼镭是“当代伟大的革命家”。对于世纪之交的物理学危机，庞加莱不苟同那些悲观的论调。他肯定以牛顿力学为核心的经典物理学的价值，不存在“破产”问题。同时他认为，物理学要摒弃与新实验矛盾的旧观念。在理论物理研究中，庞加莱率先发现狭义相对论，对现代物理学作出了卓越贡献。

19世纪末一些光学与电磁学实验激发了人们对运动相对性的思考。1898年庞加莱发表《时间的测量》一文，实际上提出了光速不变性假设。1902年他阐明了相对性原理：即在所有惯性系中物理规律，包括电磁现象，都相同。1904年荷兰物理学家洛伦兹给出两个作相对匀速运动的惯性参照系之间相对论的坐标变换关系。庞加莱命名为洛伦兹变换。他阐明洛伦兹变换的物理意义；并证明这种变换构成一个群，即后来著名的洛伦兹变换群。庞加莱以他深厚的数学功底，在引入虚时间坐标$\tau = ict$之后建立了具有正度规$x^2 + y^2 + z^2 - \tau^2$的相对论四维时空。这正是1908年闵可夫斯基将狭义相对论数学化的精髓。庞加莱的相关论文《论电子动力学》摘要发表于1905年6月，先于爱因斯坦狭义相对论论文发表。普遍认为庞加莱与洛伦兹、爱因斯坦应共享发明狭义相对论的荣誉。从一些情况看，似乎由于庞加莱与爱因斯坦两人的骄矜，他们之间缺乏相互理解与支持。庞加莱已经不是冒着生命危险，毅然跟随救生员下井救人的热血青年，而是体弱多病且重任在身的数学家。他很明确，他有限的生命必须尽可能多地完成他那做不完的研究。爱因斯坦也绝非仰慕权威的谦恭学子。后来索尔维会议一面之交，并没有使同为科学史上巨擘的这两个凡人结为挚友。

坦言心声

世纪之交时庞加莱不满50岁。他虽然身体不好，仍振奋精神，努力工作，照顾到方方面面。多少受堂弟雷蒙[①]在政界腾达的影响，庞加莱觉得他也应面对公众做点普及工作。于是先后在1902年、1905年和1908年，庞加莱有《科学与假设》、《科学的价值》、《科学与方法》三部著作面世。它们曾受到读者欢迎，被译成多种文字流传于各大陆。庞加莱在书中广泛论述了他的科学哲学思想，包括他对数学创造本性、数学直觉的作用和数学发展原动力的理解。

一、数学创造的本性。他在《数学与方法》中“数学创造”一章开门见山写到：“数学创造的发生是一个使心理学家强烈感兴趣的问题。它是一种活动，在这种活动中，人类精神似乎从外部世界所取走的东西最少，在这种活动中，人类精神起着作用，或者似乎只是自行起作用和按照自己的意志起作用，以至于在研究几何思维的步骤时，我们可以期望达到人类精神的最本质的东西。”

二、直觉在数学创造中的重要作用。庞加莱坦诚指出：“这种直觉，使我们推测到隐藏的和谐与关系。但是这种直觉并不是每个人都具有的。有些人或者没有这种如此难以定义的微妙的感觉，或者没有超常的记忆力和注意力，因此他们绝对不可能理解较高级的数学。这种人是多数。另一些人仅略具有这种感觉，但是他们具有非同寻常的记忆力和高度的注意力这样的天赋。他们将一个接一个地记住各种细节。他们能够理解数学，有时也能应用，但他们不能创造。最后还有些人多少具有所谓特殊的直觉，因此即使他们的记忆力毫无非同寻常之处，他们却不仅能理解数学，而且可以成为创造者，并试图作出发明。其成功大小取决于这种直觉在他们身上发

① 雷蒙·庞加莱（1860-1934）是法国政治家，三度出任总理兼外长。1913年-1920年为法国总统。

展程度的大小。”其实人们在体育和艺术方面能力的差异大家熟悉而易理解。

三、数学发展的原动力，即为什么研究数学？从庞加莱的科学实践看，他与牛顿、高斯和黎曼相似，是把数学与探索自然相联系，重视应用的大数学家。他认为数学物理与纯分析“它们的精神是相同的。”而从实践中他认识到数学和科学的统一性和事物的复杂性与多样性。特别从他对数学创造本性的见解，使他对一时看似无用的纯数学研究持肯定和宽容的态度。他说：“自为的数学是值得耕耘的，我是说，不能应用于物理学的那些理论，像其他理论一样值得耕耘。”庞加莱赞赏数学美的话常被人引用。实际上他在数学研究中领略到无与伦比的甘美，难与外人道也就不与外人道了。在科学哲学论述中，他推崇革新精神自由思想，反对强求一律。他警告人们：“强求一律就是死亡，因为它对于一切进步都是一扇紧闭的大门；而且所有的强制都是毫无成果和令人憎恶的。”

勉力负重

1897 年第一次国际数学家大会在瑞士美丽的湖滨城市苏黎世举行。庞加莱应邀演讲。他准备了报告“分析学和数学物理。”后因身体不适，报告请人代读了。1900 年第二次大会在巴黎举行，身为主席的庞加莱，做东还要演讲，累得够呛。同年他还应邀在国际物理学大会、哲学大会做了报告。公务之外他仍抓紧数学研究。似乎为了消除格丁根对他重视纯数学的怀疑，庞加莱加入了丢番图方程研究。他很快推进了希尔伯特等人的工作。1901 年庞加莱发表的相关论文，被认为是丢番图几何一个里程碑，有力地促进了代数几何与代数数论发展。相对于分析，他在几何、代数和数论上成果少得多，但都是一流珍品。1904 年他远涉重洋到美国，应邀在圣路易丝博览会上演讲。繁华喧闹过去后他感到身心交瘁。早先对北美洲科技进步经济发达的美好想像已成过眼烟云。他不再向往新大陆了。

为了纪念非欧几何创始人之一亚诺什·鲍耶和他的父亲法尔卡什·鲍耶，1905年匈牙利科学院宣布颁发鲍耶奖，奖励过去25年中为数学进步作出了最大贡献的一位数学家。包括克莱因在内的四位评委一致投票推选了庞加莱。得鲍耶奖令人高兴，可是第二年他被选为法国科学院主席使他深感不安。庞加莱不愿担任这种行政领导职务。他不是不愿为大家服务，只是担心自己的体力日渐不支，研究工作与行政事务难免顾此失彼。勤奋实干的居里夫妇成绩卓著，而他们要的实验室一直没有解决。这成为庞加莱的一块心病。更糟的是，后来去年刚选为院士的皮埃尔竟在车祸中丧生，给他内心深处造成更大的压力。他不知道怎样安慰居里夫人。身为主席，庞加莱要出席很多会议，而他在1883年提出的一般单值化定理还没有证明。他不得不减少出头露面，抓紧研究。最终庞加莱运用他的拓扑思想在1907年证明了这个定理。后经德国数学家克贝推广，得到著名的庞加莱——克贝单值化定理，是代数几何重要成果。刚舒口气，1908年第四次国际数学家大会又来邀请。庞加莱准备了报告“数学物理的未来”前往。不料到罗马后他又病倒。意大利医生为他做了前列腺手术。庞加莱开始意识到自己的健康问题严重。第二年初传来闵可夫斯基英年早逝的噩耗更添了一阵悲凉。

4月，格丁根向庞加莱发来进行学术交流的邀请。他决定去讲积分方程和相对论。这些是主人所长，自己也有独到之处。这样安排既保证研讨的水准，也顾全彼此的颜面。希尔伯特用存放费马大定理奖金的利息[①]为庞加莱举行了盛大招待会。他一如既往发表了友好的欢迎致词。闵可夫斯基曾给予庞加莱最高的赞誉。他的小女儿见到庞加莱时，向这位伟人深深地请了个安，就像小女孩见到国王一样。不料，庞加莱的演讲却遭遇明显的冷淡。一位格丁根讲师认为客人选题是“班门弄斧”，故而不受欢迎。殊不知“下棋找高

---

① 数学家沃尔夫什凯尔遗赠10万马克奖金，在授予第一位证明费马大定理者之前，利息由希尔伯特领导的一个机构处置。

手，弄斧到班门”方为明智。反思冷遇，庞加莱意识到自己衰老多病，难免频频失误。前些日子只顾自己思考问题，让那位芬兰学者白等3小时无功而返，太不应该。更为糟糕的恐怕是对后学同胞勒贝格的批评，但愿不致埋没他可能的创新。

鞠躬尽瘁

1911年10月30日至11月3日第一届索尔维[①]会议在布鲁塞尔举行。会议中心议题是“辐射理论和量子”。庞加莱和德国物理学家、量子论创始人普朗克、洛伦兹等21位欧洲最著名的科学家应邀与会。留给后人的一帧珍贵的照片上，我们看到已显老态的庞加莱挨着居里夫人前排就座，爱因斯坦等人在他们身后站立着。此前庞加莱未曾研究过量子论。他聚精会神听别人发言，积极参加讨论。很快他成为新理论的倡导人和推动者。1912年1月他发表文章指出，量子论是自牛顿经典物理产生以来，自然哲学中最伟大最深远的革命。他后来还说：“把不连续引入自然定律”，“这样一种非同寻常的观点可以成立”，“革命可能就在其中”。他还猜想量子跃迁适合宇宙万物，这将导致时间不连续而有时间原子。不过他知道，他并无量子论积淀，也不指望迸发了。他不断思考的还是三体问题。三体问题中有他一生丹心所系的微分方程，更蕴涵着他最重要的创新：定性和整体的拓扑思想。1889年他已指明，三体中两体质量远小于第三体时，问题有周期解。最近他又发现一些轨道可能有周期性的情况。条件是下述几何命题成立：对以两个同心圆周为边界的圆环区域作某种拓扑变换，必有两个不动点。这个命题说起来简单明了，庞加莱知道证明它不容易。他感到自己没有时间和精力证明这个命题了；只得打破惯例交出一篇未完成的论文。1911年12月9日他写信给杂志编辑部，询问能否接受未完成的论文：“在我有生

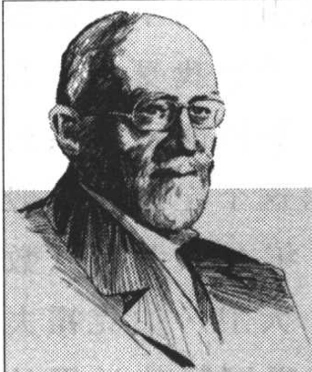
---

① 恩斯特·索尔维(1838-1922)是比利时工业化学家，国际索尔维科学会议赞助人。

之日我无法解决它们了。不过，它们最终能把研究引向尚不清楚的全新路线。据我看，它们似乎有充分发展的前景。无论我受到什么蒙蔽，我仍将坦然地把它们奉献出来。”庞加莱已经论证了一系列特殊情况下定理的正确性。他在信中表示，他坚信这个定理在一般情形是正确的。这部“未完成的交响乐”于1912年在意大利《数学杂志》上发表。几个月后美国著名数学家乔治·大卫·伯克霍夫（1884-1944）证明了这个“庞加莱几何定理”，获得国际数学界的赞扬；被认为是美国数学家在近代数学上的重大成就。伯克霍夫的证明运用了庞加莱引入的遍历性概念。此定理以“庞加莱最后定理”或“庞加莱——伯克霍夫不动点定理”为名永垂数学史册。

1912年6月26日法国道德教育联盟召开成立大会，庞加莱应邀演讲。他发自肺腑的讲词是：“人生就是持续的斗争”。“如果我们偶尔享受到宁静，那是我们先辈顽强地进行了斗争。假使我们的精神，我们的警惕松懈片刻，我们就将失去先辈为我们赢得的成果。”庞加莱少有的激动损害了他的健康。7月9日他不得不接受第二次前列腺手术。术后情况良好。清醒过来他还惦念着他那未证明的定理。

一天凌晨，睡梦中的庞加莱脸上露出一丝笑意。他梦见了什么？在梦中他见到他的定理中圆环内那两个不动点啦？一会儿他醒来，再也睡不着了。他自己起身穿衣。刚穿上衬衫还没有扣好纽扣，他倒下了。血栓夺去了庞加莱的生命。这一天是1912年7月17日。



希尔伯特

(1862—1943)

但总应要求一个数学主题变成直观上显然，才可认为研究到头了……

——菲利克斯·克莱茵

如果我们想要预见数学的将来，适当的途径是研究这门科学的历史和现状。

——亨利·庞加莱

乡村法官的儿子

在数学史上负有盛名的柯尼斯堡，坐落在普雷格尔河的两条支流之间的山丘上。每天，冒着浓烟的轮船和张起色彩斑斓蓬帆的渔船，伴随着波罗的海咸苦的海风和低飞盘旋的海鸥，穿梭在宽阔的普雷格尔河上。城市上空弥漫着烟气、鱼腥和木材的清香。1862 年 1 月 23 日下午 1 点钟，一位非同寻常的数学天才，奥托·希尔伯特与玛丽亚·特里施的第一个儿子，大卫诞生了。父亲奥托是当地乡村的法官。他给儿子的早期教育，是使大卫具有普鲁士的美德：准时、勤劳、节俭、遵纪守法和信守承诺。母亲玛丽亚是商人的女儿。在平常人的眼中，她有些与众不同。她不仅对哲学和天文学感兴趣，而且对素数十分着迷。

大卫说，自己小时候是个笨孩子。记忆东西非常吃力，领悟新概念也很慢。那时候一般孩子 6 岁就进校，可是他到 8 岁才上学。

这两年由母亲在家给他上课，以便他跟得上腓特烈预科学校初级部的学习。腓特烈预科学校在城里名声很好。这个城市的伟大儿子，欧洲启蒙运动的重要思想家，哲学家伊曼努尔·康德就曾是这个学校的毕业生。不过，大卫并不喜欢学校因循守旧的传统，也讨厌繁琐的拉丁文和希腊文的课程。只有数学最合他的心意。尽管母亲有时还不得不帮他写作文，但他却常常可以给老师解数学难题。他当然知道，不取得预科学校文凭，就不能上大学研究数学，所以他花费比别的同学多得多的时间来攻读使他头疼的拉丁文和希腊文。

预科学校最后一学期，大卫从腓特烈预科学校转到威廉预科学校，心里有说不出的高兴，因为那里很注重数学，甚至可以讨论几何学的最近发展。老师看出大卫的天赋，给予他很多的帮助。他的成绩从此突飞猛进，几乎所有的课——德语、拉丁语、希腊语、神学和物理学都得了优等，而数学则得了最高的分数“超等”。由于他的笔试成绩优异，被特别免去口试。学校在大卫的毕业评语中写道：

“他的勤奋堪称楷模，他对数学有强烈的兴趣，理解深刻，他用非常好的方法掌握老师讲授的内容，并能有把握地、灵活地应用它们。”

知心朋友

1872 年 9 月的一天。淡淡的阳光在天幕上已被轻轻抹去，吹来的晚风使人感到丝丝凉意。两辆堆满杂物的马车，蹒跚地驶过柯尼斯堡狭隘的街道，在一所破旧的大房子前停下。闵可夫斯基一家为躲避俄国沙皇政府对犹太人的迫害，风餐露宿，长途跋涉从俄国的科夫诺来到了柯尼斯堡。父亲是个商人，在离开俄国以前，政府勒令他变卖掉全部商品，而且不准赢利，所以，到达柯尼斯堡的时候，一家人几乎已一贫如洗。一切得从头开始。闵可夫斯基家有 3 个儿子。大儿子麦克斯，在俄国的时候，因为是犹太人，不能进预科学

校读书。成年以后他就跟着父亲经营白麻布的出口生意，最后大获收益。老二奥斯卡，进了柯尼斯堡的阿尔斯塔特预科学校，后来因为发现胰脏和糖尿病的联系，成为举世闻名的“胰岛素之父”。老三赫尔曼比希尔伯特小两岁，进了和二哥同一所学校，是个数学天才。有一次，老师因为一道数学难题难堪地挂了黑板，班上的同学异口同声地喊起来：“闵可夫斯基，去帮帮忙！”

赫尔曼只用了5年半的时间就学完预科学校八年的课程，进了柯尼斯堡大学。两年半以后他又转到柏林大学学习。在柏林的时候，他因为一项数学成果曾得到一笔奖金。赫尔曼把它给了一位家境贫寒的同班同学。这件事家里人毫不知情。一直到多年以后，那位同学的哥哥把这件事告诉了闵可夫斯基的家人。

闵可夫斯基大学毕业那年，巴黎科学院宣布1883年大奖的主题是一个整数分解为五个平方数之和的表示法的数目。英国数学家亨利·史密斯两年前曾得到过一个答案。赢得这样的大奖，无疑是数学家的巨大荣誉。像当年年轻的欧拉一样，壮志满怀的闵可夫斯基也决定一试。经过几个月的努力，一篇长达140页的论文出来了。他建立了几个变量的整系数二次型的理论体系，对二次型的“属”提出了更一般、更自然的定义，从而独立地得到了更好的公式。但是评选委员会接受答案的日期马上就要截止了。竞赛规定，提交的论文一律要译成法文。时间显然已来不及了。赫尔曼听从大哥的建议，在论文前写了短短的一段说明：自己因为深深沉迷于问题的解答以致忽略了竞赛的规定，希望评选委员会不要认为他没有译成法文是因为他对规定的不重视。1883年春天，竞赛揭晓了。刚满18岁的闵可夫斯基和亨利·史密斯同时获奖。这一消息在英国激起了愤怒的风暴。他们感到让一个毛头小伙子与一位老数学家分享这份奖金分明是给后者难堪。评选委员会不为所动。委员会的卡米尔·约当给闵可夫斯基写信，“干吧！我请求你，干成一个伟大的数学家。”闵可夫斯基不负所望，在短促的一生中他把格和凸集等几何概念引入数论，开拓了新的领域，特别是在电动力学的研究，为狭

义相对论提供了四维时空数学结构。诺贝尔物理学奖获得者麦克斯·玻恩说,他在闵可夫斯基的工作中找到了“相对论数学的整个武库”。

得奖的消息在柯尼斯堡引起了轰动。老希尔伯特告诫大卫“不要轻举妄动”,因为冒冒失失地去和“这样知名的人物”交朋友是有失礼貌的。父亲的告诫阻止不了大卫内心的渴望。对数学的热爱和对真理的向往,把两个年轻人的心紧紧连在一起。他们很快就成为亲密无间的好朋友,真挚感人的友谊伴随着他们的一生。

苹果树下

柯尼斯堡大学是一所具有优良科学传统的大学,数学家雅可比曾在这里教书,这里是椭圆函数的发祥地之一。雅可比的继承人理查劳特教授同样值得称道。是他发现了当时在偏远小镇的一所预科学校教书的维尔斯特拉斯的非凡才华,极力推荐柯尼斯堡大学授予维尔斯特拉斯荣誉学位,并亲自将证书送到他的手上,使维尔斯特拉斯从此摆脱困境,成为德国最卓越的数学家。

柯尼斯堡大学的学习生活对希尔伯特来说简直是天堂。教师想教什么就教什么,学生想学什么就选什么,不受限制。上课不点名,平时不考试,只有到要取得学位才考一次。所以他可以全身心地投入到数学中去,不必为枯燥的拉丁文和希腊文而苦恼。

大学后面的小山坡上有一棵一人多高的苹果树,枝繁叶茂,在周围稀落的小树衬托下分外醒目。每天下午5点,希尔伯特和闵可夫斯基在这里会面。他们一同沿着山坡的小径散步,一边热烈地讨论着一天来学习和思考的心得,有时干脆就蹲下来在地上比划起来。和他们一起参加讨论的还有性情温和的大学讲师阿道夫·胡尔维茨(1859-1919)。他在菲利克斯·克莱茵的门下取得博士学位,在函数论方面有出色的工作,在数学各领域有着坚实的基础,他理所当然地成为3人中的领头人。“那时候没有想到,”希尔伯特后来回忆道,

“这些散步竟会把自己带得这么远！”

访师游学

根据导师林德曼的建议，希尔伯特以某些代数形式的不变性质作为自己的博士论文，很快获得通过。闵可夫斯基兴奋地说：“我没有想到这么精彩的数学定理会出现在柯尼斯堡！”闵可夫斯基自己也在同一年获得博士学位，不久就应召服兵役去了。希尔伯特没有服兵役，但苹果树下的散步已无法继续了。

获得哲学博士学位，还只是科学生涯的第一步，甚至还不够资格给学生上课。必须再做一项有创造性的工作，得到教授会的满意，被授予讲师称号，才有资格讲课。不过这期间大学仍然不负责支付有保证的工资，讲师的生活得靠选听他讲课的学生的学费来维持，因此生活的拮据是不言而喻的。等到他的工作和能力得到赏识，就能成为有固定薪水的副教授了。至于正教授，普鲁士大学里正教授的名额是固定的，柏林有三名，柯尼斯堡有一名。只有当正教授的位置出现空缺，才有机会从众多的副教授当中挑选出来填补。所以，要当上正教授，真可谓难于上青天！

希尔伯特决定做一次学术旅行，因为柯尼斯堡毕竟有点偏僻。这位未来的数学界的领袖人物需要到身处战斗最前沿的数学大师那里做一番实地考察，同时为讲师的论文作准备。胡尔维茨建议他到莱比锡去会见菲利克斯·克莱茵。克莱茵虽然当时年仅 36 岁，却是数学界的一位传奇式人物。他身材魁梧，一双炯炯有神的眼睛英气逼人。他 23 岁（希尔伯特正是这个岁数）就在埃尔朗根当上了正教授。他在就职典礼上发表了数学史上称为埃尔朗根纲领的著名演讲，大胆提出把许多不同的看起来毫无关联的几何，在群的概念下统一归类。在他身上，学术创造力、组织能力和打破纯粹及应用科学之间壁垒的能力得到完美的结合。克莱茵热诚欢迎柯尼斯堡年轻博士的到来。希尔伯特选听了克莱茵的课还参加了一个讨论班。在

讨论班上希尔伯特提出一个报告，被克莱茵仔细地保存了起来。克莱茵后来说："一听他的报告，我就知道他将前途无量。"这份报告，在1922年希尔伯特60岁生日的庆祝宴会上，克莱茵坐着轮椅，将它送还给这位当时已誉满天下的数学家。

告别克莱茵，希尔伯特来到群英荟萃的巴黎。以庞加莱为首的法国同行友好地接待了希尔伯特。特别是埃尔米特，十分亲切而好客。他是柯西之后法国杰出的分析学家。他证明了e的超越性并用椭圆函数解一般五次方程。两人探讨了他们所共同关心的"哥尔丹问题"。在巴黎，希尔伯特完全投身于数学和拜访名师，除了访问过天文台，没有参观过其他地方。

在希尔伯特返回柯尼斯堡的途中，他没有忘记到格丁根拜访备受争议的克罗内克。克罗内克个子瘦小，身高几乎不到1.5米，但却是一位德国数学界举足轻重的人物。他对数学，特别是高等代数作出过十分重要的贡献，是柏林科学院院士。他对数学的尖刻批评尽管使人感到不快，但是没有人能够置若罔闻。有人曾提醒希尔伯特，不要指望会受到克罗内克的欢迎。可是出乎许多人的意料，希尔伯特受到非常友好的接待。这次访问希尔伯特记录下的谈话足足有四页之多，而其他被访问的数学家，包括哥尔丹在内，都没有超过一页。

哥尔丹问题

为了取得讲师资格，旅行结束以后，希尔伯特提交了一篇论文，内容和博士论文一样，是关于不变量的。这并不奇怪，因为代数不变量理论是当时最热门的课题。德国最重要的数学杂志《数学年鉴》几乎成了不变量的专刊。这个理论的起源要追溯到17世纪笛卡尔发明的解析几何。一个几何图形在一定的坐标系中有相应的代数形式。同一个图形坐标系不同，它相应的代数形式的某些性质也应该保持不变。这些"不变量"适合于表征给定的几何图形的特

征。随着射影几何的发展，导致在代数中与它相平行的发展，也就是集中研究在各种变换群下代数形式的不变量。这个理论的重要开拓者是英国数学家阿瑟·凯莱和他的好朋友约瑟夫·西尔维斯特(1814-1897)。德国人很快赶了上来。任何给定次数的二元型的基或有限完备系的存在性就是德国数学家保尔·哥尔丹（1837-1912）证明的。哥尔丹的大半生都致力于不变量的研究，取得了一系列成果，被誉为“不变量之王”。为了纪念他，这个理论中一个更一般的、仍未解决的最著名的问题被命名为“哥尔丹问题”。这个问题就是：是否存在一组基（即一组个数有限的不变量），使得其他所有的不变量都能够用这组基的有理整形式表出？这个难题成为全世界数学家竞相攻克的堡垒。希尔伯特的讲师资格论文，就是为这场攻坚战作准备的。希尔伯特很快被授予讲师称号。从此，虽然没有固定的薪水，他有资格在大学讲课了。他要求自己在讲课中既教育学生，又要提高自己。所以他每年不教重复的课。

一年很快过去了。希尔伯特感觉到，自己讲授的课程在变换，但是有一个问题却始终萦绕在心头，那就是“哥尔丹问题”。这时候，闵可夫斯基远在波恩，难以有机会重新参加希尔伯特和胡尔维茨苹果树下每天的散步。希尔伯特决定再次进行学术之旅，以克服远离数学活动中心所带来的苦恼。旅行路线作了精心的安排。旅行的第一站，是到埃尔兰根觐见“不变量之王”。然后前往格丁根，重访克莱茵。最后取道柏林，拜访克罗内克和刚退休的维尔斯特拉斯，然后返回柯尼斯堡。

1888年3月，柯尼斯堡春寒料峭，普雷格尔河还没完全开冻。希尔伯特满怀希望与期盼，踏上了旅途。希尔伯特到达埃尔兰根的时候，哥尔丹的《不变量理论讲义》第二部分刚出版。年过半百的哥尔丹思维敏捷，手里总是夹着一支雪茄。哥尔丹热情欢迎远道而来的年轻同行，向他详细介绍了“哥尔丹问题”的来龙去脉。实际上，自从哥尔丹自己解决了最简单的情形以来，寻求解答一般问题的人本质上都遵循同样的道路。但是这样的方法已变得出奇的复杂

和困难，往往整页纸也写不下一个单独的式子。一个时期以来，哥尔丹问题一直在希尔伯特的心头盘桓。现在，当面聆听哥尔丹亲口的讲述，突然闪出了奇妙的灵感，唤起他无限的遐想。一股巨大的冲动油然而生。他要攻克这个难题！旅程按计划进行，但是一路上始终摆脱不了对“哥尔丹问题”的思考。

1888年7月，历时3个半月的旅程结束了，希尔伯特按老习惯到柯尼斯堡不远的小渔村度假。1888年9月6日他从那里给格丁根科学会的《通讯》寄出一份短短的注记。注记中他出人意料地改变了问题的提法：假如给定无穷多个包含有限个变量的一组代数形式系，问在什么条件下，存在一组个数有限的代数形式系，使得所有其他的形式可以表成它们的线性组合，系数是原来那些变量的有理整函数？

希尔伯特的答案是：这样的形式一定存在。

长期以来，多少人绞尽脑汁，日夜思索要攻克的难题，竟在“不经意间”被一个年轻的讲师出人意料地解决了！为了证明不变系的基的有限性，实际上并不需要把它构造出来，甚至不必证明如何去构造它们。所需要做的就是从逻辑的必然性方面去证明有限基的必定存在，因为任何别的结论都会导出矛盾——这正是希尔伯特所做的。

12月，哥尔丹定理的证明出版了。希尔伯特火速给不变量理论的奠基人阿瑟·凯莱寄了一份。凯莱从剑桥向希尔伯特表示衷心的祝贺；克莱茵认为希尔伯特的证明非常简单，在逻辑上是不可抗拒的。

但是，反对的声音同样存在。哥尔丹高声地说：

“这不是数学，这是神学。”

克罗内克也坚持认为，没有构造就不能算存在，希尔伯特的证明根本谈不上是数学。

说实在的，作为数学家，比起现在的存在性证明，希尔伯特还是更喜欢有一个实际的构造。一位数学家曾经说过：“证明某类对

象的存在，一种是构造出这种对象的一个确确实实的例子，一种是去证明，假如这种对象不存在就必然导致矛盾。两者有本质的不同。前者是有一个有形的对象，而后者仅仅是有矛盾。”

尽管希尔伯特并不同意哥尔丹和克罗内克的观点，但是他不能无视他们的批评意见。他希望有一天能用构造性的方法来证明不变基的有限性。可惜的是他一时还找不到头绪。这时他正埋头于研究克罗内克代数数域的工作。使希尔伯特感到惊喜的是，正是在克罗内克的工作中，他找到了解决构造性证明的强有力的工具。真可谓“踏破铁鞋无觅处，得来全不费工夫！”

1892 年，希尔伯特利用早些时候证明的一条定理作为基础，他得到一个本质上是有限的工具，终于实现了梦寐以求的构造方法。哥尔丹退让了：

“我自己一直确信，神学也有它的价值。”

闵可夫斯基高兴极了：“我早就清楚，由你来解决掉这个老的不变量问题，是迟早的事——就像是“i”上只缺那个点；但是，它竟如此出奇地一下子给解决了，真使我非常高兴，让我祝贺你。”可惜的是，一代宗师克罗内克已经与世长辞。

随着哥尔丹问题的解决，希尔伯特宣告：

“我相信，由不变量衍生出来的函数域理论中最重要的目标已经达到。”

几十年来，为人们所热烈讨论的不变量理论一下子沉寂了下来，而希尔伯特在学术界的地位，不可阻挡地急剧上升了。

代数数论

1892 年 8 月柯尼斯堡大学教授会一致决议，由希尔伯特接任胡尔维茨的副教授职位。当了 8 年副教授的胡尔维茨受聘于瑞士联邦技术学院担任正教授。

10 月 22 日希尔伯特与喀娣·耶罗士结婚。她贤惠，对丈夫体

贴，性格和外形与希尔伯特有几分相像。

1893年希尔伯特给出e和π的超越性的新证明。他的证明出奇的简单和直接，大大胜过以往的方法。e和π的超越性的证明，最早分别是由埃尔米特和希尔伯特的导师林德曼作出的。

这时希尔伯特开始投身于他最喜爱的数论。高斯称数论是数学的皇后，因为她美丽而又高不可攀。高斯第一个把数论从有理“域”拓广出去。在有理“域”中，两个数的和、差、积、商仍然属于有理数域。他在数论里引进形如$a+b\sqrt{-1}$（其中a，b为有理数）的数，这些数组成的域就是代数数域，同样，形如$a+b\sqrt{2}$这样的数也构成一个域，它们都是代数数论所研究的对象。把数论推广到代数数域有一个最大障碍，即在大多数代数数域中，算术定理不成立。库默尔、戴德金和克罗内克在代数数论上作了许多重要工作，但是19世纪代数数论的最高成就是属于希尔伯特的。

秋天，希尔伯特前往慕尼黑参加德国数学会年会。会上，希尔伯特提出了关于将一个域中的数分解成素理想的两个新证明。他的工作给其他成员留下深刻的印象。大家推举希尔伯特和闵可夫斯基在两年内提出一篇数论发展现状的报告。因为库默尔、戴德金和克罗内克的工作极其复杂，以至于当时大多数数学家都看不懂。他们期待着希尔伯特和闵可夫斯基能够简明清晰地表达出数论研究工作的现状。

很快有了令人兴奋的消息。林德曼接受了慕尼黑大学的聘请，空缺的正教授位置，无疑将由希尔伯特来接任。而希尔伯特空出来的副教授职位由闵可夫斯基来接替。每天到苹果树下去散步和关于数论的讨论又可以愉快地进行。数论年度报告在希尔伯特脑海中逐渐形成了。

不久事情又有新的变化。格丁根大学的德国数学家海因里希·韦伯要去斯特拉斯堡，这意味着希尔伯特有可能到格丁根执教。克莱茵来信想听听希尔伯特的想法。到格丁根无疑是希尔伯特梦寐以求的。希尔伯特字斟句酌地起草给克莱茵的回信，然后让喀娣用她

最漂亮的书法誊写好寄出：

“你，更有影响力的环境，你们这所大学的光荣传统，将提供一种科学上的刺激力，这对我是最有决定意义的。此外它将实现我妻子和我的最美好的愿望：能生活在一座比较小的大学城里，尤其是像格丁根这样景色秀丽的地方。

丝毫不必怀疑，我将万分喜悦并毫不踌躇地接受格丁根的召唤。”

不出一星期，克莱茵高兴地给希尔伯特写信：“真出乎意料，比我希望的快得多。请接受我最衷心的欢迎！”

1895 年 3 月，格丁根乍暖还寒。红瓦屋顶衬托在四周起伏的丘陵下，优美而宁静。希尔伯特来到格丁根时，正好是高斯来到之后整整 100 年。格丁根光荣历史上又增添了一位伟大的数学家。不过学生们并没有立即感受到他的影响。和高大威严，气度不凡的克莱茵相比，希尔伯特中等身材，说话直率，动作敏捷，头发稀疏，蓄着淡淡的红胡须，粗一看根本不像一个教授。但是，正如他的学生外尔所说，他是童话中的魔笛手，他的甜蜜诱人的笛声，吸引一群一群“老鼠”，跟着他跳进数学的深河。

在柯尼斯堡执教的 8 年半中，除了每周一小时的行列式课程，他没有重复一个课题。所以在格丁根他能根据克莱茵的意图毫不费力地讲授多种课程。第一学期讲授行列式和椭圆函数，并且与克莱茵一道，指导每星期三上午举行的实变函数讨论班。讨论班结束以后他就与学生们一道漫步到受人欢迎的海茵堡餐厅用餐，一边继续讨论数学问题。第一年，他谈的几乎都是代数数域。回家以后，他就全神贯注地投入到数论报告的准备中。发现数论与其他数学分支的联系使他兴奋不已。他认为，数论在代数和函数论方面已经起着主导作用，只是因为数论一直以孤立的方式发展，没有把这种联系揭示出来。

1897 年 4 月 10 日，整整 400 页的《数论报告》正式完成。它无论在哪方面都超出了学会成员的最初期望。他们本来只希望他对

这门理论的当前状况作一个概述，而收到的却是一篇真正的杰作，将全部困难融会贯通成一个优美完整的理论。闵可夫斯基在收到报告的精装本后这样写道：

“我毫不怀疑，你本人将跻身数论领域中伟大的经典学者的行列。”

《数论报告》发表以后，希尔伯特的《相对阿贝尔域理论》发表。这是一篇纲领性论文，开创了后来众所周知的类域论。如果说希尔伯特关于不变量的工作是一项发展的终结，那么他在代数数域方面的工作则成为众多数学家奋斗的起点。

桌子、椅子、啤酒杯

1898年9月，格丁根风和日丽，新的学期开始了。来自全国以至世界各地的学生们，陆陆续续地返回这座美丽的小城。希尔伯特讲授几何基础的预告引起学生们极大惊异。因为在他们的印象里，这位教授“只谈数域”对其他话题似乎没有兴趣。

实际上，还是在柯尼斯堡大学担任讲师的时候，希尔伯特就开始考虑几何基础的问题。他认为欧几里得几何关于点、线、面的定义在数学上其实并不重要，它完全可以用桌子、椅子、啤酒杯来代替。重要的是，采用的公理系统和在推理过程中避免对视觉明显性的不自觉的依赖。

关于公理，希尔伯特认为它必须满足下列要求：

它们必须是完备的，所有的定理都可以从这些公理推得；

它们必须是独立的，如果从这组公理中去除任何一条公理，至少会有某些定理不可能得到证明；

它们必须是相容的，从这组公理出发不可能推出互相矛盾的定理。

康德认为公理必须是先验的，而希尔伯特对公理的要求要宽松得多。希尔伯特将一个数学理论看做是通过演绎方法由一组任意选

择的假设公理推导出来的定理系统，而对这些假设的真实性及其含义不加任何限制。因此，在希尔伯特看来，不仅欧几里得几何中的平行公理可以改变，其他公理一样可以改变。只要这个公理系统满足上面的 3 个条件就可以了。

20 多年前，克莱茵发现了一个“模型”，通过这个模型，可以把非欧几里得几何的基本对象和关系与欧几里得几何中特定的对象和关系等同起来，证明了非欧几里得几何和欧几里得几何一样地相容。现在希尔伯特运用解析几何证明了，欧氏几何中存在的任何矛盾将会表现为实数算术中的一个矛盾。这就说明无论是非欧几何还是欧氏几何，至少与实数算术一样地相容，而实数算术的相容性是数学家所普遍接受的。

希尔伯特关于几何基础的书一出版，立即引起轰动，在几个月内成为最畅销的数学书。庞加莱称这是一部经典著作。他说：“当代有些几何学家可能觉得，在承认以否定平行公设为基础的可能的非欧几何方面，他们已经达到了极限。如果他们读一读希尔伯特教授的这部著作，那么这种错觉就会消除。他们将会在这部著作中发现，他们作茧自缚的屏障，已经被彻底冲垮了。”

许多年以后，由于发现可以通过一组特定的公理推导出果蝇的遗传规律，希尔伯特感到欢欣鼓舞。他高兴地说：“如此简单和精确，同时又如此巧妙，超出了了任何大胆的想像。”

当学生们还在困惑为什么这位一直只谈“代数数域”的教授，能够转眼间在一个全新的数学领域做出如此辉煌的成就时，希尔伯特已经开始在一个完全不同的数学领域，挖掘新的宝藏了。

妙手回春

1851 年，黎曼在他著名的博士论文中以一个假设作为他复变函数理论的基础：拉普拉斯方程的边值问题一定存在一个解。这个假设在直觉上是合理的。因为该数学问题所描述的相应物理状态必定

有一个确定的物理结果，或者说物理解。黎曼给这个原理冠上他的老师狄利克雷的名字，后者曾在特殊情形下研究过这个原理。从此这个原理以“狄利克雷原理”闻名于世。黎曼的论文受到高斯在内的数学家们的高度赞扬。高斯注意到，拉普拉斯方程的边值问题，可以归结为对于具有边界上取给定值的连续偏导数的函数寻求某个二重积分的极小值问题，这样的极小值显然存在。

但是，善于挑刺的维尔斯特拉斯不以为然。他认为不经证明就接受狄利克雷原理是不合理的。刚开始，许多人都感到维尔斯特拉斯要求有点过分。但是，黎曼本人认为维尔斯特拉斯的批评是正当的。不过他并没有因为维尔斯特拉斯的批评而对狄利克雷原理产生动摇。他认为“在物理上有意义”的问题的一定“在数学上有意义”。他还相信，总有一天可以对所求的使积分取得的极小值的函数的存在性给予证明。可惜黎曼在生前没有做到这一点。他不到40岁就去世了。更没有想到的是，维尔斯特拉斯后来成功地构造了一个反例：在给定边界条件下，使积分达到最小值的函数并不存在！整个数学界震动了。狄利克雷原理在数学物理中实在太有用了。如果放弃这一原理，被抛弃的将不仅仅是黎曼理论。

数学家们纷纷着手来挽救狄利克雷原理，可惜多少年过去了，一切的努力都无功而返。当希尔伯特开始注意狄利克雷原理时，数学家们已经放弃挽救狄利克雷原理的一切希望。正如一位数学家所说：“如此美丽而又有如此广阔应用前景的狄利克雷原理，已经从我们的视线里永远消失了。”

与同时代的大多数数学家不同，希尔伯特并不把严格性的要求看做是一种负担。他相信严格性是数学的必然要求，而且有助于方法的简明。他高度评价维尔斯特拉斯的工作，不过他也不同意把狄利克雷原理一笔勾销。他认为这个原理的“诱人的简明性和广阔的应用可能性”是与它“内在的真实性”密切相关的。

1899年夏天，希尔伯特向德国数学会提交了一篇不到6页的论文。他在格丁根大学宣读这篇论文的时候，把自己的努力称作“狄

利克雷原理的复活”。他的思路十分简明：只要对曲线和边界值的性质加上某些限制，就可以消除维尔斯特拉斯所批评的缺点，恢复黎曼理论的简明和优美。他出神入化的处理手法博得数学界的一片赞美和惊叹。克莱茵兴奋地说，希尔伯特成功地“给曲面剪了毛”。6 年以后，希尔伯特给出了狄利克雷原理的第二个证明。希尔伯特的工作触发了一系列突破。瑞士物理学家里兹从修正过的狄利克雷原理出发，发现了一个通过偏微分方程求边值问题数值解的强有力的方法。

揭开新世纪的面纱

10 月的格丁根，秋高气爽，阳光灿烂。市政厅广场喷水池里的小牧鹅姑娘暖洋洋地沐浴在金色的阳光下。随着希尔伯特取得一个接一个举世瞩目的成就，新世纪的脚步不知不觉间临近了。新世纪的盛会，第二次国际数学家代表大会决定 1900 年 8 月在巴黎举行。大会筹备机构邀请希尔伯特作主题发言。

希尔伯特深知这项任务责任重大。在这样历史性的时刻，他需要有一篇与此相称的演讲。他一直想为纯粹数学作一次辩护发言，以回应长期以来对它的责难。他也在思考“问题”在数学发展中的重要性，因为它们是数学活的血液，通过“问题”可以探讨一下新世纪数学发展和数学家努力的方向。在这个时候，他当然不会忘记首先听听闵可夫斯基的意见，因为他的意见往往十分中肯而且切中要害。闵可夫斯基第一封信表示他需要考虑考虑。过了两天，他又给希尔伯特来了一封信。他不主张为纯粹数学作辩护发言，因为庞加莱在上次大会上所表达的意见是很温和的，人们很难提出异议。“最有吸引力的题材，莫过于展望数学的未来，列出在新世纪里数学家们应当努力解决的问题。这样一个题材，将会使你的演讲在今后几十年的时间里成为人们议论的话题。”

这无疑是个好主意。不过闵可夫斯基也担心，希尔伯特是不是

愿意把自己解决某些问题的思路公诸于众。再说，作预言毕竟是件困难的事。

希尔伯特没有立刻回信。他还没有拿定主意。他又写信给胡尔维茨征求意见。胡尔维茨的回答没有记录。

迟迟没有收到希尔伯特的回信，闵可夫斯基感到失望。他写信给希尔伯特："我已经没有去参加这次会议的愿望了。"

其实，希尔伯特正按照闵可夫斯基的建议日以继夜地在准备大会的发言。离大会不到一个月，闵可夫斯基收到希尔伯特寄来的大会演讲稿的清样，题目很简单：《数学问题》。闵可夫斯基不再说不想去巴黎开会了。他和胡尔维茨忙着对演讲内容进行讨论并且提出一些建议。

8 月的巴黎，烈日炎炎，闷热难耐。第二次国际数学家大会在博览会所由庞加莱宣布开幕后第二天，便搬到巴黎大学所在的僻静小山上举行。8 日上午，一位身材中等、衣着朴素的学者健步走向讲台。他宽阔前额上的头发已几乎全无，闪亮的镜片后面透出睿智而坚定的目光。他卓越非凡的才智和刚毅纯真的人格魅力，深深吸引了每位代表。全场鸦雀无声。他走上讲坛，环顾一下巴黎大学的演讲大厅，缓慢地、审慎地开始演讲。根据闵可夫斯基和胡尔维茨的建议，希尔伯特提出的 23 个问题另外分发给与会代表，因此他只对其中 10 来个问题作些说明。

"我们当中有谁不想揭开未来的面纱，看一看在今后的世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢？我们下一代主要数学思潮将追求什么样的目标？在广阔而丰富的数学思想领域，新世纪将会带来什么样的新方法和新成果？"

希尔伯特的讲话一开始就抓住了每一位听众的心。在回顾了问题在数学发展中发挥的重要作用以后，他为纯粹数学作了辩护：

"在每个数学分支中那些最初、最老的问题肯定是起源于经验，是由外部现象世界所提出的。但是，随着它的进一步发展，人类的智力受着成功的鼓舞，开始意识到自己的独立性。它自身独立地发

展着，通常并不受来自外部的明显影响，而只是借助于逻辑组合和一般化、特殊化巧妙地对概念进行分析和综合，提出新的富有成果的问题。当纯思维的创造力进行工作的时候，外部世界又开始起作用。这种思维与经验之间反复出现的相互作用，推动数学向前发展。”

在介绍问题以前，他对问题的解决提出一般的要求：“首先是要有可能通过有限个前提为基础的有限步推理来证明解的正确性，而这些前提包含在问题的陈述中并且必须对每个问题都有确切定义。”

数学在每一个发展时期都有自己特定的问题。在世纪之交，希尔伯特站在数学研究的最前沿，提出了23个问题来预示20世纪数学发展的进程。这些问题立刻吸引整个数学界的想像力。人们把解决这23个问题，哪怕只是其中的一部分，看成是至高无上的荣誉。100年来，23个问题中约有一半已获得解决。据统计，从1936年到1974年，获得被誉为数学诺贝尔奖的菲尔兹国际数学奖的20名获奖者中，至少有12人的工作与希尔伯特问题有关。我国数学家在解决希尔伯特问题的工作中也作出了贡献。关于希尔伯特的第八个问题中的哥德巴赫猜想，我国的陈景润的工作处于领先地位；孪生素数的最佳结果也属于陈景润。第十六个问题的后半部分，在微分方程研究中有重要贡献的苏联数学家彼德罗夫斯基（1901-1973）曾声称证明了$n=2$时，极限环个数不超过3。但是这一结果是错误的，已由我国的史松龄和王明淑举出反例。“问题”在推动数学发展中历来具有举足轻重的影响。但是希尔伯特如此集中地提出一整批问题，并且如此持久地影响这一科学的发展，这在科学史上是绝无仅有的。

快乐时光

巴黎大会一结束，希尔伯特回到家乡柯尼斯堡，到他小时候十

分喜欢的小渔村度假。这时，他已享有一个数学家所能享有的最高声誉。他以朴素而稳重的喜悦来接受这种成功，并没有用虚伪的谦虚而自扰。外国科学院纷纷选他为院士。德国政府授予他为枢密顾问（相当于英国的爵士）。克莱茵在成为枢密顾问后，喜欢别人用这个头衔来称呼他。但是，希尔伯特不喜欢。有一次，有人来拜访时口口声声用“枢密顾问阁下”来称呼他，使他很不高兴。来人不安地问：

“我打扰你了吗，枢密顾问阁下？”

“不，你没有打扰我”希尔伯特回答说，“除了你的奉承之外！”

1900 年冬天，一位瑞典学生给希尔伯特讨论班带来一篇最新发表的关于积分方程的论文，作者是一个名叫伊凡·弗雷德霍姆（1866-1927）的瑞典人。积分方程是一类函数方程，它与数学物理问题，特别是连续介质的振动密切相关。这个理论的发展一直十分缓慢。现在，弗雷德霍姆创造性地给出了某些特殊方程的解，揭示了积分方程和线性代数方程暗含的相似性。希尔伯特意识到弗雷德霍姆的工作所蕴含的巨大意义。他毫不犹豫地放下变分法，投身到积分方程的研究。他的工作为这个领域迎来了全盛发展期。

希尔伯特 40 岁生日以后几个月，柏林大学教授拉撒路·富克斯去世。将聘请希尔伯特前往柏林任职的消息在校园里不胫而走。讲师和高年级学生都感到惶惶不安。他们中的有些人本来就在柏林，是冲着希尔伯特才来格丁根的。他们推举三名代表来到希尔伯特家求情，希望他留下来。喀娣在花园里用果子露甜酒招待他们。希尔伯特倾听了他们的请求，但是没有表态。代表们只得快快而返。这一段时间里，希尔伯特频繁来往于柏林和格丁根，他在课堂上出现少见的心不在焉和神经质，都使人相信他是走定了。

其实，希尔伯特并不想离开格丁根。他认为，从事数学研究，在格丁根比在柏林好。这里和大自然更亲近，还可以仰仗克莱茵的行政天才。生活在高斯的大学还会有什么“委屈”呢？他惟一感到不足的是，他缺少一个像闵可夫斯基那样能够提供科学激励和个人

友谊的同事。

在格丁根，有一条不成文的规定。被聘者可以利用其他大学聘请的机会，来改善个人工作条件或改进他所在的部门或专业的环境。正是利用这一机会，作为继续留在格丁根的条件，希尔伯特提出，增设一个数学教授职位并且聘请闵可夫斯基来担任。在克莱茵的支持下，经过一番交涉，柏林方面终于同意。当数学俱乐部的成员听说“希尔伯特不走，闵可夫斯基要来”的消息，个个喜出望外，奔走相告。他们组织了一次庆祝晚会，表达他们对教授的敬意。

一直被蒙在鼓里的闵可夫斯基得知这一消息，喜不自禁：“放眼未来的生活和工作，我看到了最美好的希望！”

1902年秋，闵可夫斯基来到格丁根。希尔伯特不再感到孤单：“打一个电话，或者沿街走几步路，向他书房的角窗上扔一块小石子，都意味着要进行一次数学的或非数学的活动。”每星期在家里举行的晚会上，因为闵可夫斯基的参加，希尔伯特谈笑风生，有了更大的欢乐。有一次大家谈到伽里略的宗教审判。有人责备伽里略没有为自己的信念坚持到底。希尔伯特表示反对。他认为伽里略不是傻瓜。只有傻瓜才相信科学真理需要宗教式的殉道。科学成就要由时间来证明自身的正确。的确，科学家如何应对外部压力，总是一个见仁见智的永恒的话题。闵可夫斯基话语不多，但是他总是切中问题的要害而且十分得体。每星期天早晨两个朋友偕同妻子一道去野餐。孩子们后来也参加了星期天的远足。

现在，闵可夫斯基代替克莱茵，与希尔伯特共同指导讨论班。这段时间，闵可夫斯基醉心于研究数论，希尔伯特则埋头研究积分方程。两人都享受着他们一生中最美好的时光。

打起你的背包，到格丁根去

20世纪初，格丁根享有“数学的麦加”的美誉。全世界在热爱数学的年轻人中流传着这样一句话：“打起你的背包，到格丁根去！”

传奇人物克莱茵的崇高声望吸引着世界各国的学生。他的讲课被奉为经典。克莱茵工作起来兢兢业业，一丝不苟。他通常比学生早一个小时来到课堂，仔细检查助教准备的参考文献表，对讲稿进行最后修改加工。所有的公式、图表和引文在讲课前都作了周密的安排，写上黑板的东西从来不必擦掉。最后，整个黑板就包含对讲课内容的极妙概括，每一个方块位置都恰到好处。他擅长于统揽全局，能在迥然不同的问题间发现统一的思想。他只讲证明思路，要掌握全部内容，学生们在课后还需要花上四五倍的时间。

闵可夫斯基被誉为真正的数学诗人。他的课妙趣横生，引人入胜。学生们都以聆听他的课为荣。有一次在讲授拓扑学时遇到了这个领域的一个尚未解决的著名问题——四色问题，即任一张地图只需四种颜色就能保证相邻的两区域不会着同一种颜色。

“这条定理直到现在还没有证明，是因为只有一些三流的数学家在研究”闵可夫斯基轻松地说，“我可以很快证明它。”

他当场开始证明。这堂课结束时，还没有证明出来。下一堂课继续证明。一个星期过去了。最后，在一个阴雨的早晨，闵可夫斯基走进教室时，恰好雷声大作。他站在讲坛上，温和的圆脸上怀着歉意说：“老天也被我的骄傲激怒啦，我的证明也是不完全的。”

四色问题在 1976 年由美国数学家阿佩尔和哈肯，利用高速电子计算机的帮助得到证明。

在格丁根，最具号召力的当然是希尔伯特。这不仅是因为他的声誉如日中天，也因为他直率纯真，朴实无华，平易近人，对青年人有不可抗拒的吸引力。

和克莱茵不同，希尔伯特的课和他的为人一样，可以用“毫不修饰”来形容。他讲得很慢，经常重复，生怕有人听不懂，有点像预科学校上课的风格。但是他的课“简明，自然，逻辑严谨。”和闵可夫斯基一样，他在讲课时会有“即兴发挥”，突然展开他自己对某个事实的想法或表现出忽然有所发现的冲动，虽然不像克莱茵

那样尽善尽美，在细节上常常出错，却不时地会迸发出创造性的思想火花，所以更受学生的青睐。

后来成为希尔伯特继任人的赫尔曼·外尔，1903 年来到格丁根的时候，还是一个 18 岁乡村小伙子。他 40 年后回忆往事时仍满怀激动：

“希尔伯特是个杰出的范例，在他身上显露了真正科学天才的无限创造力……我记得听的第一堂数学课简直太迷人了……那正是希尔伯特讲关于 e 和 π 的超越性的著名课程……没听到希尔伯特讲授基础课的年轻人，真是太可惜了!”

这一年夏天，外尔怀揣着希尔伯特的《数论报告》回家度假。虽然他还没有这方面的准备知识，却花了整整一个假期来攻读这本书，就像当年狄利克雷如饥似渴地攻读高斯的《算术研究》。后来，外尔总把这几个月说成是一生中最美好的日子。

悲情时刻

希尔伯特研究积分方程的时候，受到闵可夫斯基的感染，对物理学产生了浓厚的兴趣。他和闵可夫斯基决定在讨论班上研究运动物体的电动力学。这个讨论班的活动扣人心弦，富于刺激力，给当时的学生，后来的诺贝尔物理学奖获得者玻恩留下难忘印象。在讨论班得到的电动力学的许多结论几乎与当时在伯尔尼专利局供职的爱因斯坦论文的观点不谋而合。

1908 年 9 月，德国科学家和医生协会年会在科隆举行。正处于巨大创造活动高峰的闵可夫斯基在会上作了“空间和时间”的报告。在这个“几何化的伟大时刻”，闵可夫斯基为相对论引进了极为简单的数学“空-时”观，“三维几何成了四维物理中的一章”。

在闵可夫斯基作报告的时候，希尔伯特刚从几个月前严重的忧郁症中恢复过来，正投身于攻克一个数学难题——华林问题。1770 年美国数学家爱德华·华林（1736-1798）猜测：每一个正整数必可

表为4个平方数之和、9个立方数之和、19个四次方数之和等等；一般地，对应每一个 n 次方都有一个有限的数。很快，有人证明了每个正整数可表为4个平方数之和。但是对于其他次方的证明陷入了僵局，100多年来，几乎毫无进展。最近似乎出现了一丝曙光。有人利用某种分析方法作了有希望的尝试。胡尔维茨顺着这个方向做了一些工作，但最后遇到了难以克服的困难。希尔伯特从胡尔维茨止步的地方开始，甚至用了一个胡尔维茨的恒等式。到年底，希尔伯特终于成功。和哥尔丹定理相似，希尔伯特的目标是证明存在性而不是给出实际构造。不同的是，他虽然没有给出 n 次方时所要求的那个数，但是却提供了一种方法，按照这种方法，至少在原则上可以对每一种情况作出一个估计。当然，这是一个极为冗长而复杂的证明。哈代后来与李特尔伍德[1]给出了第二个证明，他说："我对能解决掉这个历史问题钦佩之极；……这是绝对的成功，是现代数论的里程碑之一。"

希尔伯特自己十分高兴并引以自豪，他打算在下一次聚会上向闵可夫斯基和联合讨论班报告华林定理的证明。

新的一年悄悄来临了。1月6日（星期三）闵可夫斯基从外地休假回来。星期四下午3点正是教授们每周一次徒步旅行。这一次的目的地是丛林山的凯尔旅馆。荒凉的山丘和光秃秃的树木丝毫没有减少教授们的兴致。闵可夫斯基以他特有的欢悦列举了他最近在电动力学中的研究成果；希尔伯特则宣告将在下一次讨论班上提出华林定理的证明；大家你一句，我一句，气氛热烈。星期五闵可夫斯基照例去上课，下午主持了一场博士考试。

不料，星期天的晚饭后，闵可夫斯基突然感到肚子剧痛难耐，很快被送往医院。诊断为急性阑尾炎，立即进行困难的切除穿孔阑尾的手术。

---

① 约翰·李特尔伍德（1885-1977）是英国数学家，他长期与哈代合作，在分析学与数论上作出了重大贡献。

星期一，病情开始恶化，但是闵可夫斯基仍神志清醒。他知道自己的病情已无法挽回。他安详地接受死神的召唤。他只感到惋惜，因为自己正处在创造力的高峰，还有许多工作可做。他在病床上看到自己最近一篇论文的校样，考虑是否能把未完成的部分解释得更好。他也牵挂着是否能够听到下一次讨论班上希尔伯特的报告。

星期二中午，1909 年 1 月 12 日，闵可夫斯基永远地闭上了眼睛。一支正在演奏的美妙乐曲戛然而止！

希尔伯特在课堂上宣布闵可夫斯基的噩耗时，禁不住失声痛哭。看到希尔伯特泪流满面，学生们不知所措。一切似乎都乱了套。星期四下午，谈论数论的散步没有了。代替它的是数学教授们最后一次守灵，时间，希尔伯特记得，又是正三点。

这年春天，希尔伯特没有给格丁根科学会寄积分方程的论文。他和喀娣的大部分时间都在陪伴闵可夫斯基夫人和她年幼的女儿。他还担任了编撰闵可夫斯基著作的总编辑并准备一篇纪念讲话。为了这个讲话，他把闵可夫斯基给他的 90 封来信全部读了一遍。5 月 1 日，他在格丁根科学会举行的专门会议上动情地发表了纪念闵可夫斯基的演说："对于我，他是天赐宝玉——这样的宝物难得降临人身——我以能如此长久地保有它而感恩不尽。"

华林定理的证明出版了。作者的题赠是："为了纪念赫尔曼·闵可夫斯基"。

反对战争

1910 年，理查德·库朗（1888-1972）成为希尔伯特的助手。同年，希尔伯特送交格丁根科学会一篇关于积分方程的论文。对积分方程研究的深入与抽象，导致希尔伯特空间建立，泛函分析产生。

"希尔伯特的研究第一次揭示出积分方程的真正意义，"库朗写道，"这个理论和它极不相同的数学领域的各种关系，它的多方面应用，其内部结构的协调一致和简明性，以及把过去大量孤立的研

究统一起来后所产生的力量，这些都第一次在希尔伯特的工作中变得明白无疑了。”

怪不得1924年底库朗在《数学物理方法》第一卷出版的时候，他把希尔伯特的名字与自己的名字一起并列在封面上。库朗在序言中解释说，他之所以这样做，是因为书中大量内容取材于希尔伯特的论文和演讲，同时也出于这样的希望，即这本书能在一定程度上体现对数学研究和教育有决定影响的希尔伯特精神。与以往的应用数学的经典著作相比，它是一个巨大的进步。确切地说，过去还从来没有过这样的著作。诺贝尔奖获得者维格纳说，《数学物理方法》好像是特意为量子力学而准备的。

1910年秋天，匈牙利科学院宣布，“由于思想的深刻性、方法的创造性以及证明的严密逻辑性，大卫·希尔伯特对数学的发展作出了巨大的贡献”，从而希尔伯特继庞加莱之后获得了第二届该院设立的鲍耶奖。

积分方程的工作把希尔伯特带到了数学和物理的边缘地带。这期间他结交了许多学物理的年青人：索末菲尔德，爱瓦尔德，玻尔兄弟，雪勒，德拜……。格丁根的生活继续前进了。克莱茵计划建造的数学大楼（数学研究所）就要付诸实施。但是，夏天，奥地利斐迪南公爵在萨拉热窝被一个塞尔维亚学生刺杀了。

8月1日，格丁根一个漫长的假期开始了。奥匈帝国对塞尔维亚开战。到8月底已经有成打的国家卷入战争。

为平息世界各国的反对声浪，德国政府让它的最有声望的科学家和艺术家出来发表一个宣言，以表明他们对德皇威廉二世的支持。《告文明世界书》的第一句话就是：“说德国发动了这场战争，这不是事实。”

克莱茵和希尔伯特作为享有世界声誉的数学家被邀请在宣言上签名。克莱茵是一个极端的爱国主义者，他毫不迟疑地在宣言上签了名。希尔伯特不一样。他认为战争是愚蠢的行为。他逐字逐句检查宣言的内容，得出的结论是：无法判断宣言所说的都是事实。因

此，他拒绝签名。另一个拒绝签名的著名人物是爱因斯坦，他在柏林威廉皇帝物理研究所工作。

爱因斯坦所受到压力相对较轻，因为他具有德国和瑞士双重国籍。希尔伯特不同。他不仅是德国人而且是普鲁士人。11 月初开学时，许多人不再来听希尔伯特的课，因为他像个“卖国贼”。不过，希尔伯特的许多同事理解他的行为，即使是克莱茵也很快意识到自己的冒失。宣言的发表使全世界舆论一片哗然。巴黎科学院开除了克莱茵，但保留了希尔伯特的位置。没有教育缓役，教授的保荐信和优秀的成绩同样无济于事，差不多所有的年轻人、学生和讲师都已经或即将离开学校奔赴战场。往日挤得满满的阅览室几乎空无一人。希尔伯特的助手兰德，因为视力太差，一开始并没有去服役。但是一年后，他也被召到红十字队呆了两年，然后应召入伍。因为，那时军队什么人都要了。

1917 年春，法国数学家伽斯顿·达布逝世的消息传到格丁根。希尔伯特对达布一向十分敬重，因为他是一位品德高尚，在数学上，特别是在曲面微分几何学等领域做出过杰出贡献的大数学家。他还是鲍耶奖评选委员会成员。希尔伯特写了一篇悼文送到格丁根的《通讯》发表。希尔伯特一生写过 4 篇悼文，另外 3 篇是悼念维尔斯特拉斯、闵可夫斯基和胡尔维茨，他们都是德国人，而闵可夫斯基和胡尔维茨更是与希尔伯特私交极深。但是达布是法国人而且德、法两国正在激烈交战，所以这篇悼文的含义非同寻常。果然，这篇文章立即遭到一部分学生的强烈不满。他们聚集到希尔伯特的住宅前，高声要求他收回这篇悼文并销毁所有复印件。希尔伯特断然拒绝。他来到校长办公室威胁要辞职，除非就这些学生的无理行为作正式道歉。他很快收到了这样的道歉。

生活愈来愈困难了。英国的封锁让德国尝到了苦头。食品异常匮乏。由于马铃薯大减产，出现了战争以来最严重的饥荒。希尔伯特在花园里种起水果和蔬菜，可是肉就很难弄到了。更使希尔伯特感到苦恼的是，由于战争，国际学术交流也停顿了下来。

爱米·诺特

这一年，数学家麦克思·诺特（1844-1921）的女儿爱米·诺特来到了格丁根。

爱米学数学有一段有趣的故事。原来，爱米家里的墙纸是用父亲的草稿做的。年幼的爱米看到这些墙纸不知不觉间就迷上了数字和算式。与漂亮的柯瓦列夫斯卡娅不同，她长得结实粗壮而且高度近视，粗嗓门，从举止和外表上简直看不出她是女性。但是，对于数学的贡献，她比迷人的索非亚要大得多。她是迄今为止数学史上最卓越的女数学家。她的心地异常善良，“有一颗体贴别人的心，广泛而又深切地关心着自己的同行，关心着全人类的利益，这种温文慧敏的情操，正是她女性的体现。”她曾是哥尔丹的学生，发表过6篇论文。1910年，她更把哥尔丹的结果推广到 n 个变量。她的工作结果，使希尔伯特的“神学”被人们作为数学来接受了。她决定到格丁根来碰碰运气。因为她知道，格丁根大学在高斯倡导下是德国第一所授予妇女博士学位的大学。但是诺特似乎过于乐观了。要成为讲师，在当时的德国决非易事。教授会中的哲学家、语言学家和历史学家极力反对妇女成为讲师。他们的理由是：如果让一个女人当了讲师，她以后就会成为教授，成为大学评议会的成员。当我们的士兵从战场上回到大学，发现他们将在一



爱米·诺特

个女人的脚下学习。他们会怎么想呢？希尔伯特感到很气愤，他奋起反击："先生们，我不认为候选人的性别是不能让她当讲师的理由。大学评议会毕竟不是澡堂。"

但希尔伯特终因势孤力单，没有成功。他只好用变通的办法让诺特留下来。有些课以希尔伯特的名义开，而由诺特来主讲。确实，由于高度抽象和概念化，她的讲课只有少数几个人听得懂，这些人中有荷兰来的范·德·瓦尔登（1905-1996），奥地利来的阿廷（1898-1962），和苏联来的亚历山大罗夫（1896-1982），他们后来都是赫赫有名的大数学家。

不久，在《告文明世界书》发表差不多4年后，德皇逃亡荷兰，战争结束了。

战后，格丁根最富有成果的研究圈子之一，是以爱米·诺特为中心展开的。可以说，在格丁根的后起之秀中她对未来数学发展的影响最大。她关于微分不变式的重要结果足以使她获得第一流数学家的声誉。但与她目前正进行的研究，即在公理化基础上建立一般的理想论相比，就显得无足轻重了。这项工作源于希尔伯特早期的代数工作，但在诺特手里，公理化方法不再仅仅是澄清逻辑与深化基础的手段（像希尔伯特所做的那样）而且是进行具体数学研究的有力武器。1995年，安德鲁·维尔斯在攻克费马大定理的时候就用到这个武器。尽管在数学上取得卓越的成就，她在大学里却地位最低，也没有薪金。对此，她安之若素。

希尔伯特终于为爱米·诺特争到了一个数学讲师职位，在此以前，格丁根还从来没有女人当讲师的先例。3年后，她成为一名编外副教授。大学里一般没有这样的职位，同样也没有工资。总之，这位杰出的女数学家和她的工作在她的祖国一直没有得到应有的重视，她也没有成为格丁根科学会的成员。

1932年，诺特同阿廷一起获阿克曼——托依布纳奖。同年9月，她应邀在瑞士苏黎世举行的国际数学家大会上作报告。她的数学思想直接影响了1930年以后的代数学乃至代数拓扑、代数数论和

代数几何的发展。

1933 年希特勒上台，爱米·诺特被迫流亡美国。1935 年在一次癌症手术中去世，时年 53 岁。

爱因斯坦给纽约时报写了一封信，悼念爱米·诺特的去世：

“根据现代权威数学家的判断，诺特女士是迄今为止（女性中）最重要的富于创造性的数学天才，……

她个人的生活并不被他人所注目，然而她奋斗得来的果实却是一代人所能给予子孙后代最有价值的财富。”

理性的呼唤

战后相当一段时间，德国数学界一直被排斥在国际活动之外。1928 年意大利数学家在筹备 1912 年以来的第一次国际数学家会议时，决定恢复对德国数学组织的邀请。可是以柏林大学数学教授路德维希·比伯巴赫为首的一大批人抵制这次会议。8 月，希尔伯特急性贫血旧病复发。但是，他毅然率领一个 67 名数学家组成的代表团赴波隆那出席会议。

在开幕式上，当德国代表团进入会场时，人们看到一个熟悉的，但比以前苍老的身影出现在队伍的前头，全场顿时鸦雀无声，接着长时间的热烈的掌声响彻大厅。每个代表都从座位上站起来表示欢迎。希尔伯特开始他的演说时抑制不住内心的激动：

“我感到万分高兴，在一个漫长而艰难的时期之后，全世界数学家又在这里欢聚一堂。为了我们无比热爱的这门科学的繁荣，我们应该这样做，也只能这样做。应该看到，作为数学家，我们是站在精确科学研究的高山之巅。除了义不容辞地担当起这个崇高的职责，我们别无选择。任何形式的限制，尤其是民族的限制，都是与数学的本质格格不入的。在科学研究中人为地制造民族的或种族的差异，是对科学极端无知的表现，其理由不值一驳。数学不分种族……对于数学来说，整个文明世界就是一个国家。”

希尔伯特的演说，铿锵有力，掷地有声。人们不难看到他的一系列招致“争议”的行为，拒绝在战争宣言上签名，对“敌国”数学家达布的悼念和对犹太女数学家爱米·诺特的关怀等等，对他来说，其实都是再自然不过的必然选择。因为在他看来，“任何形式的限制”，都“与数学的本质格格不入”。

他在会上提出的论文是关于数学基础的。由于罗素和策墨罗等人相继发现了集合论的悖论，数学证明的可靠性遭到了质疑。早在1904年的海德堡世界大会上，希尔伯特说，“如果想避免悖论，那就必须对逻辑定理和算术定理进行研究”，从而在数学史上第一次提出了应该把证明本身也作为数学研究的对象。由于他对几何相容性的证明约化为算术的相容性，因此算术相容性就成为没有解决的问题。他一直乐观地认为证明论的实现只是一个数学技巧问题。但是最近的一些迹象表明，这样的估计可能是过于乐观了。关于形式系统相容性的证明，阿克曼第一个作出了实质性的尝试。他的最后结论是：“要证明相容性必须对形式系统作本质上的限制”。后来，冯·诺伊曼①的一篇论文给出的相容性证明也不能应用于整个形式系统。

除了相容性，希尔伯特还提出了完备性。这也是一个只有像希尔伯特那样的大数学家才能提出的问题。始料不及的是证明公理系统完备性所遇到的困难，丝毫不亚于相容性。

会议结束后，当希尔伯特去结账时，别人告诉他，会务组已经替他结清了。

“啊哈，早知道是这样，”他说，“我该多吃点啦！”

柯尼斯堡的荣誉市民

1930年1月23日，教授法定的退休年龄到了。格丁根举行了

① 约翰·冯·诺伊曼（1903-1957）是美籍匈牙利数学家，在纯粹与应用数学、计算机研制发展等诸多领域都有重大贡献，是20世纪最重要的几位大数学家之一。

隆重的仪式。一条街被命名为希尔伯特大道。各种荣誉像雨点般飞来，其中最使他高兴的是柯尼斯堡市政会表决授予希尔伯特“荣誉市民”称号。为了准备这次演说，他倾注了大量心血。他要找一个能将这些伟大的名字和他自己的经历交融在一起的主题——柯尼斯堡和格丁根，雅可比、高斯和康德，数学和科学，科学与经验，他生活中经历到的知识和思想的巨大进展。

秋天，授予仪式在德国科学家和医生协会会议上隆重举行。希尔伯特的双眼依然锐利而深邃，眼神还是那样纯真。他的手放在讲坛上，缓慢地、字斟句酌地开始演说：

“认识自然和生命是我们最崇高的任务。”

他直奔主题的开场白一下子吸引全场人的注意。当时正在柯尼斯堡度蜜月的美国数学家奥尔回忆道，“我记得，希尔伯特的演说和冯·诺伊曼关于集合论基础的演讲都有激动人心和引人入胜的感染力。——它使人感觉到，现在，人们正在千方百计地为解决数学公理的基础和数学应用于自然科学的各种前提作出最后的努力。”

在一生的科学事业临近结束时，他对着话筒坚定有力地说出最后一句话：

“我们必须知道。

我们必将知道。”

当他的眼睛离开讲稿面向听众时，他笑了。

几乎就在希尔伯特信心十足地演讲的时候，一位25岁名叫库特·哥德尔的青年，完成了一项研究。简单地说，算术的相容性用元数学所容许的狭义逻辑是不可能确定的。用外尔的形象的说法就是“上帝是存在的，因为数学没有矛盾；魔鬼也是存在的，因为我们不能证明这无矛盾性。”

哥德尔的结果还有一个更为惊人的推论：有一个算术语句，它是真的又是不可证明的，即不仅是数学全部，即使是任何一个有意义的分支也不能用一个公理系统概括起来，因为任何这样的公理系统都是不完备的。

希尔伯特花了巨大努力所追求的目标落空了。看来寻求真理的道路远比想像的曲折而漫长。

70 岁生日的庆祝晚会，在数学研究所新建的大楼举行。《自然科学》上刊登了外尔的生日祝词。出版商亲自到格丁根把登载《数论报告》及数论其他论文的希尔伯特全集第一卷献给他。尽管国家处在萧条时期，但是大家都穿上了略显陈旧的晚礼服，使晚会显得隆重而优雅。宴会之后是舞会。学生们举着火把冒雪游行到灯火通明的大楼前向他欢呼。希尔伯特来到台阶上，身上裹着宽大的皮领外套。有人在这里拍了一张照。在研究所的每个窗户，都可以看到著名人物的面孔，他们在那里向外张望。

这最后一幕是学生们给予教授的最高荣誉。

“数学”希尔伯特回敬学生们的欢呼“万岁，万岁，万岁！”

这一年，国家社会主义党在旧德意志帝国议会选举中取得重大胜利。第二年，兴登堡总统任命阿道夫·希特勒为总理。希特勒上台颁布的第一号法令是，为粉碎“恶魔的势力”，要辞退几乎所有纯犹太血统的人。

回荡的笛声

在市中心，纳粹党旗飘扬在市政厅上空。它的巨大阴影投向喷泉里忧郁的小牧鹅姑娘。大学的校刊和出版物又出现了长年不用的老德国体。每一期的首页都写着：由戈培尔先生主办出版。

希尔伯特学派遭到最沉重的打击。往日的朋友和学生纷纷被迫离去。格丁根几乎只剩希尔伯特孤独一人了。他自费留住贝尔奈斯当他的助手，但是，到 1934 年，因为是犹太人，他也不得不离开德国到苏黎世去了。有一个不是笑话的笑话在当地流传着：格丁根只有一个雅利安数学家，他的血管里却流着犹太人的血。这则笑话不是无中生有。原来在希尔伯特生病的时候，库朗曾为他输过血。

1935 年，全集的最后一卷出版了。里面有他最早的学生布鲁门

萨尔写的传记。希尔伯特写了一封短简，认为能有这样一位名声赫赫的人物来担任他生活和工作的解释者，是他一生中最后一次巨大的幸运。

不久，布鲁门萨尔被撤去在亚琛的教授职位；接着，他在《年鉴》封面上的名字也被抹去。在朋友们帮助下他离开德国前往荷兰。但是，1943 年，盖世太保在一次周期性的对荷兰的犹太人搜捕中抓到了布鲁门萨尔。1944 年他死于捷克斯洛伐克的赛尔辛斯塔特集中营。

"年轻的时候，"希尔伯特有一次痛心地对喀娣说："我曾下过决心，绝不重复老人们常讲的一句话——过去多好，现在多糟，即使我老了也决不说这种话。可是，现在我不得不说了。"

一次宴会上，希尔伯特被邀坐在纳粹教育部长旁边。

"现在格丁根的数学怎么样？"部长问，"它已经完全摆脱了犹太人的影响！"

"格丁根的数学？"希尔伯特答道，"确实，这儿什么都没有了。"

75 岁那一年，一名记者来采访，请他谈谈格丁根与数学史有关的地方。

"实际上，我什么也不知道，"他冷淡地说，"记忆只会把思想搞乱。长期以来，我完全抛弃了的记忆。我真的不需要知道任何事情，因为有别的人，我的夫人和我们的女仆，她们会知道的。"

当记者"有礼貌地"对此表示怀疑时，希尔伯特微微一笑："嗜，也许我从来就是被认为有健忘的天赋。是的，就因为这个缘故，我才研究数学的。"说完，他就把眼睛阖上了。

1942 年 1 月，希尔伯特跌倒在格丁根的大街上，摔断了胳膊。从此他再也无法自由活动，并由此诱发一系列并发症。1943 年 2 月 14 日，大卫·希尔伯特与世长辞了。他被安葬在河的对岸，克莱茵也长眠于此。草地的墓碑上仅仅刻着姓名和日期。

阿诺德·索末菲尔德，希尔伯特最早的学生之一，从慕尼黑赶来站在灵柩旁讲述了希尔伯特的工作。"希尔伯特最伟大的数学成

就是什么？是不变量吗？是他最喜爱的数论吗？是几何基础吗？——那是欧几里得几何和非欧几何之后，该领域中最伟大的成就。在函数论基础和变分法计算方面，希尔伯特证明了黎曼和狄利克雷猜想的正确性。积分方程的研究也达到了高峰……不久，在新物理学里……它们又结出了硕果。他的气体理论，对新的实验知识产生了根本性的效应，至今仍未过时。还有，他对广义相对论的贡献也具有永恒的价值。至于他探索数学真知的最后努力，现在还没有定论。但是，当这个领域有可能进一步发展时，它将不会绕过而必须经由希尔伯特继续前进。”

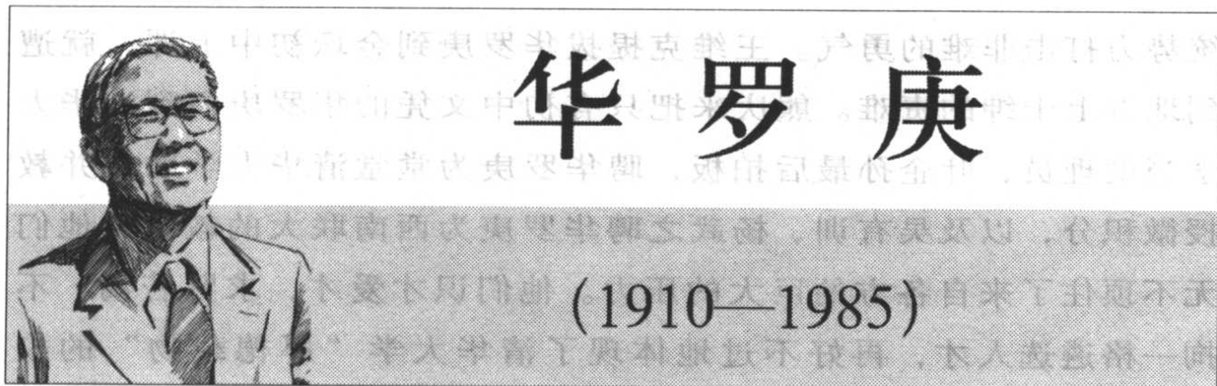
《自然》杂志认为，世界上难得有一位数学家的工作不是以某种途径导源于希尔伯特的工作的。希尔伯特像是数学世界的亚历山大，在整个数学版图上留下他那巨大显赫的名字。那里有希尔伯特空间、希尔伯特不等式、希尔伯特变换、希尔伯特不变积分、希尔伯特不可约性定理，希尔伯特公理、希尔伯特子群、希尔伯特类域，那一串串闪光的明珠照亮了数学前进的道路。

穿杂色衣服的魔笛手远去了。但是，他那甜蜜的笛声继续在世界各地回荡。无论在欧洲大陆，在英国，在大洋彼岸的美国，在俄罗斯，在日本，在印度和中国，到处都有希尔伯特的学生，以及希尔伯特学生的学生。

我们必须知道。

我们必将知道。

希尔伯特那响彻云霄的号召，激励着他们继往开来，不断向前！



华罗庚

(1910—1985)

数学是科学的大门和钥匙

——罗吉尔·培根①

中国近代数学能超越西方或与之并驾齐驱的主要有三个，……一个是陈省身教授在示性类方面的工作；一个是华罗庚在多复变函数方面的工作；一个是冯康在有限元计算方面的工作。

——丘成桐②

诞生于落后而又动乱不断的旧中国，地处闭塞的小县城，一个家境清寒，只有初中学历，腿有残疾的青年，最后成为蜚声中外的大数学家。这一传奇式的故事在现实中怎么会成为可能？他，绝顶聪明。这毫无疑问。他，异常勤奋。这也是不争的事实。但是，仅靠这两点显然不够。在科学史上，实在有太多不幸的事例，一项优秀的成果因为种种原因得不到承认，以致被湮没。如果这位青年遇到的师长只在乎自己，不关心别人，讲究论资排辈，又嫉贤妒能，那么他的结局将会完全不同。要做到这一点并不容易。首先要有识才的眼光，其次要有广纳贤才的胸怀，正如韩愈在《师说》中所言："弟子不必不如师，师不必贤于弟子。"最后还要有不怕遭到传

① 罗吉尔·培根（约1220-1292）是英国学者，他推崇数学也重视实验。

② 丘成桐（1949-　　）在几何、拓扑和分析上均获重大成就，对现代数学和理论物理都有重要贡献，是荣获菲尔兹奖的首位中国人。

统势力打击非难的勇气。王维克提拔华罗庚到金坛初中上课，就遭到地方上士绅的责难。熊庆来把只有初中文凭的华罗庚招到清华大学当助理员，叶企孙最后拍板，聘华罗庚为堂堂清华大学助教并教授微积分，以及吴有训、杨武之聘华罗庚为西南联大的教授，他们无不顶住了来自各方的巨大的压力。他们识才爱才，求贤若渴，不拘一格遴选人才，再好不过地体现了清华大学“厚德载物”的校训。因此，在仰望大数学家华罗庚——中国数学史上这座丰碑的时候，人们也深切缅怀本文提到的和没有提到的，构成中华民族脊梁的优秀的中国知识分子。

20 世纪初，辛亥革命的前夕。

金坛，一个僻静的江南小县城，位于常州市正西约 50 公里。清盈的丹金漕河静静地从中穿过，流向湖光潋滟的洮湖。沿岸是一排低矮陈旧的瓦房和茅屋。河上有一座叫清河桥的拱桥。桥东共有 5 家小店，居中的“乾生泰”是一家蚕丝、棉花的代销店，兼卖一些像香烟，火柴，蜡烛，棉线一类的日用杂货。店主叫华瑞栋，号祥发，人称华老祥，为人精明能干。

1910 年 11 月 12 日，秋高气爽，艳阳高照，喜鹊在枝头吱吱喳喳地叫，华家上下喜气洋洋。这一天是华老祥的 40 岁生日。更让他惊喜的是，妻子今天生下了一个白白胖胖的儿子！一直在为至今还没有儿子而感到烦恼的华老祥，心里真有说不出的高兴。为了保佑老来得子长命百岁，华老祥说“放进箩筐避邪，同根百岁，就叫箩根吧！”箩字去掉竹字头是罗，根与庚同音，那年又恰是庚戌年。于是，华罗庚由此得名。家里和乡里人都亲昵地称他为“罗罗”。

俗话说“大难不死，必有后福”。和高斯 3 岁时险些被大水冲走相似，华罗庚 3 岁时也遇到过一次意外。那一天，妈妈抱着他坐一辆人力车去老家丹阳。途经一座桥，推车人不小心把车弄翻了，母子俩掉进了河里。急得妈妈直喊救命。幸好一个浪头将他们冲到岸边，幸免于难。

学校和恩师

华罗庚7岁开始到金坛仁劬小学上学。因为贪玩，成绩不好，没有拿到毕业证书，只拿到一张修业证书。

1922年，华罗庚念完小学的时候，金坛还没有一所初级中学。说来也巧，那年金坛县立第一高小校长韩大受，卖掉家里仅有的几十亩田产，拿出自己的全部积蓄，在金坛夫子庙内创办了金坛县立初级中学，简称金坛初中。这样，华罗庚幸运地成了金坛初中第一届学生。这一届一共收了8个学生。3年后毕业时还剩下6个学生，华罗庚名列第二。

韩大受要求学生不仅读好书，还要做好人。当他得知华罗庚的家境困难，就免去华罗庚的学费。刚进入初一，华罗庚的童心未泯，仍十分贪玩，第一学期的数学不及格。韩大受没有厉声责骂，而是耐心教育，要华罗庚珍惜来之不易的学习机会，并告诉他自己的做人原则："做人要正，待人要诚，学习要勤，工作要实，生活要俭，做一个有益于社会，有益于国家的人。"华罗庚没有辜负韩大受的谆谆教导和殷切期望。从初一下学期开始，华罗庚发愤用功，成绩突飞猛进。

在华罗庚通向成功的漫长道路上数学教师李月波功不可没。华罗庚深怀感激之情地谈到自己的数学老师："月波老师是一位难得的好老师，是他引导和培养了我对数学的兴趣，是他为我在初中三年打好了数学基础，使我以后得以自学数学，并成为我一生为之追求和奋斗的目标。"

在金坛初中，真正赏识华罗庚的是王维克①。他发现华罗庚做的数学习题，虽然涂涂改改写得很不工整，但是他解题不满足于已知的方法，总要独辟蹊径，对它们加以改进和简化，是个很有头脑、

① 王维克（1900-1952）是中国数理教育家，曾任教于上海公学。

有培养前途的孩子。他借书给华罗庚，鼓励他好好学习，还告诉他做人和做学问的道理：

“做学问就好比挖井，只有认定目标，挖到深处，才能渗出清清的泉水。如果漫无目标地东挖一锹，西挖一锹，是挖不出水的。做学问也是如此。朝三暮四，见异思迁的人是难有作为的。”

听了王维克的教诲，更坚定了华罗庚集中精力刻苦钻研数学的志向。

发奋自学

1925 年，华罗庚初中毕业。他的人生道路上面临一次选择。最理想的当然是到省城念高中，可是家庭的经济情况不允许。听一个亲戚说：“上海有一所中华职业学校，初中毕业即可报考，家境困难的还可免学费。”华老祥考虑再三，觉得这个主意不错。于是，经过考试，华罗庚进了这所学校的商科。

华罗庚在上海期间，有一件事值得一提，那就是他曾获得上海市珠算比赛第一名，也可以说华罗庚是中国第一届数学竞赛的冠军。华罗庚虽然在家里帮着料理小店时也会打算盘，但是来参加比赛的都是整天跟算盘打交道的银行职员和钱庄伙计中的佼佼者。华罗庚能在高手如林的珠算比赛中脱颖而出，靠的不是更熟练的手法而是智慧。他在对传统的珠算方法仔细分析后发现，最花时间的乘除法还有改进的余地。最后，凭着智慧，再加上他擅长的心算，胜过了精通熟练的珠算高手。

可惜，珠算比赛的胜利没有给华罗庚带来喜悦。家里来信说，因为要帮助侄儿侄女，尽管只差最后一个学期了，华罗庚的 50 元生活费无法如数寄来了，除非他自己能够找个工作来弥补。无奈当时在上海要找个工作很不容易，即使是珠算冠军也无济于事。于是，华罗庚在上海学习一年后，终因筹不足钱，无法继续学业，只得抱憾回家。

困难和挫折并没有把华罗庚压倒。这时，他对数学已产生浓厚兴趣，也知道用功读书了。他要照王维克教导的那样，一锹一锹地往下挖，一直到挖出清泉汩汩流出！只可惜他手头上只有屈指可数的三本书，一本《大代数》、一本《解析几何》还有一本50页的《微积分》，其中不少还是从王维克那里借来摘抄的。为了弥补不足，他把零花钱积攒起来，每月去购买《学艺》和《科学》两本杂志。白天，华罗庚要在店里帮父亲打算盘、记账，有的时候还要站柜台。一有空，他就埋头看书做习题，思考问题。桥西有家豆腐店，天没有亮主人就起来磨豆腐。他发现华罗庚已经点着油灯在看书了。豆腐店旁边是“晋康布店”，布店的伙计都是起早贪黑地干活。但是有一件事他们印象深刻，那就是对面“乾生泰”的华罗庚总是比他们起得更早，睡得更晚。只见他每天一动不动地坐在那里，不是在看书就是在写些什么，好像是一个从来不睡觉的“木头人”。天热的时候，蚊子嗡嗡地叫，屋子里闷热难忍。即使这样，华罗庚仍难得和大家一起到外面乘凉。冬天他把砚台放在脚炉上，免得墨水结冰，看书做题也不会手脚冻僵。为了省钱买纸，店里包棉花的纸都写满了他做题的字迹。乡里有谁见过没日没夜一动不动地坐在那里看书用功的人呢？怪不得有人背地里说，华老祥的儿子是个“呆子”。有时候因为沉迷于问题的思考而怠慢了顾客；母亲总是苦口婆心地劝他：我们不是书香门第的斯文人，你还是认命吧；省些灯油，顾顾吃饭的事吧。华老祥就没有这样的好脾气。他骂华罗庚念书念“呆”了。气愤的时候，甚至把一大堆草稿拿来撕掉，扔到街上。这时候，华罗庚总是拼命护住草稿纸，不让他父亲抢走。

据说有两件事使华老祥不再干预儿子的学习了。一次是发生在收蚕丝的大忙季节，“乾生泰”白天收购，晚上结账。有一天晚上，管账的算来算去少了1000元。这可不是个小数目。要是真的少了1000元，把整个“乾生泰”搭进去也不够啊。华老祥急得一时没了主意。华罗庚知道后不慌不忙地说：“我来帮你们算算吧！”华老祥当然不相信儿子真有这么大的本事。不过还是抱着一线希望把账本

交给了华罗庚。不一会儿，结果出来了：账是对的，是管账的算错了。从此华老祥对儿子刮目相看了。另一件事是有一次，华老祥在茶馆喝茶，忽然有一颗牙掉了。“牙齿”与“儿子”谐音，迷信的华老祥担心，会不会儿子要保不住啦？这件事也促使华老祥要华罗庚早日完婚，以便为华家传宗接代。

1927年，华罗庚结婚了。妻子吴筱元清秀端庄，知情达理，是贤妻良母型的女子。结婚后华罗庚长年在外奔波操劳，而且至少有20年家庭经济窘困。吴筱元含辛茹苦、无怨无悔地把一生奉献给了丈夫和子女，备受人们的尊敬。在他们的教育下，他们的六个子女，个个知书达理，很有教养。

大病致残

1929年，王维克返回故乡就任金坛初中校长。看到华罗庚自学不辍，各方面大有进步，就把他招到学校做会计兼庶务，也就是说，除了会计，打铃、冲开水、打扫卫生等一切杂务都在内，每月工资18元大洋。这对于已有妻小却苦无工作的华罗庚来说，无疑是雪中送炭。华罗庚一边工作一边继续刻苦钻研，还把自己的心得向上海的《科学》杂志投稿。功夫不负有心人。1929年12月，华罗庚的第一篇论文《Sturm氏[①]定理的研究》在14卷14期《科学》上发表了！这一成功使华罗庚看到了一丝曙光，给了他巨大的信心和力量。家里人不用说也是欣喜异常。华罗庚拿了杂志给王维克看。看到自己的学生通过自学有今天的成功，王维克十分高兴。他勉励华罗庚要再接再厉，争取更大的成绩。他自己是学数理的，知道华罗庚已有一定的基础。他打算让华罗庚来教下学期初一补习班的数学课。

但是王维克的计划还没有付诸实施，一场灾难降临到了金坛和

---

① 查理·弗朗西斯·斯图姆（1819-1855）是法国数学家。斯图姆定理确定实系数方程实根个数，他在微分方程与几何上也有诸多成就。

华罗庚的身上。全县爆发了一场瘟疫，可能是伤寒。华罗庚从腊月二十三开始得病，一直发高烧，昏迷不醒。服了几个月的药，丝毫不见好转，医生感到已无药可施。“他想吃什么，就给他吃点什么吧！”医生说完就走了。但华家不愿轻易放弃。在吴筱元的精心照料下，按原来的药方继续给他服药。奇迹终于出现。到第二年端午，华罗庚痊愈了！只可惜因为卧床将近半年，卧床期间没有经常给他翻身，以至造成左大腿肌肉坏死而残废了。这给本已窘困的生活更增加了困难。

幸好王维克不改初衷，初一补习班的数学课仍决定由华罗庚来上。不料，这招致当地一班士绅的不满。他们联名罗织了十大罪名向教育局告了王维克一状，其中一条就是“任用不合格的教员华罗庚”。他们的恶状虽然没有告赢，但心高气傲的王维克一怒之下，拂袖而去。

好在继任王维克的是韩大受。教了一个月的数学是不能再教了。但是会计工作还是由华罗庚来做。左腿残了，书不能教了，但饭碗总算保住了。而且《科学》还发表了自己的文章，这样看起来前景也还不是一片漆黑。他要加倍地努力，决不向命运屈服。他坚信“冬天来了，春天还会远吗？”

峰回路转

1926年，上海《学艺》杂志7卷10期发表了一篇苏家驹的论文《代数的五次方程之解法》（以下简称“苏文”）引起人们的一片惊讶。我们知道，二次、三次以至四次代数方程的解可以由其系数的四则及根式运算来表示。但是对于五次代数方程，阿贝尔早在100多年前就证明了，它是不可解的。现在“苏文”声称已找到五次代数方程由其系数的四则与根式运算表示出来的方法，显然与阿贝尔理论相矛盾。

实际上苏家驹是知道阿贝尔理论的。然而他“终不信其绝对不

能解"！在现实生活中，这样的人的确不少。他们对理论没有真正搞懂，却想恃自己的聪明和努力把理论推翻，一鸣惊人。他们无疑把时间和精力用错了地方。更不可思议的是，《学艺》杂志竟会刊登这样的文章。这也反映了旧中国的数学水平与主流的西方数学有多大的差距。当时，华罗庚正在中华职业学校念书，没有看出"苏文"的破绽。他甚至仿照"苏文"的思路得到"代数的六次方程之解法"。但华罗庚毕竟不是苏家驹。他意识到这不是做学问的正确道路。于是，他仔细研读阿贝尔理论和伽罗华理论，"见其条例精严，无懈可击"，再回过头来检查"苏文"，终于发现"苏文"中一个十二阶行列式的计算有错误。

1930 年 12 月出版的《科学》15 卷 2 期上，华罗庚的《苏家驹之代数的五次方程解法不能成立之理由》（以下简称"华文"）发表了。清华大学算学系①主任熊庆来②对"苏文"早有看法，不过也没有打算为这么一个小问题去写文章反驳。现在看到"华文"，特别是"华文"在《序言》中实事求是地写出了自己从仿"苏文"到找出"苏文"破绽的过程十分赞赏。他颇为纳闷。华罗庚，中国数学界从来没有听说过这个名字啊。这是"何方神仙"呢？说来也巧，同办公室的教员唐培经是金坛人，听说过华罗庚这个人。熊庆来请唐培经去了解情况。唐培经一口答应。当熊庆来得知华罗庚家境颇为困难只是一个初中毕业生，靠刻苦自学，数学已经钻研得很深，颇感意外，更觉难能可贵。于是征得理学院院长叶企孙③同意，决定聘华罗庚来清华工作。华罗庚的个人命运从此掀开崭新的一页。

---

① 历史上曾称数学为算学，算学系即数学系，算学分析即数学分析。

② 熊庆来（1893-1969）是国际知名函数论专家，1914 年、1931 年两度赴法国深造，获法国国家理科博士学位。擅长分析，对复变函数有深入研究，对我国数学研究与数学教育作出了重要贡献。

③ 叶企孙（1898-1977）是中国物理学家、教育家。在量子物理，磁学，声学都有重要成就；1921 年测定的普朗克常数值在国际上沿用了 16 年；长期在清华北大任教，为我国科技教育作出重大贡献。

游龙归海

熊庆来嫌写信太慢，要唐培经拍电报给华罗庚，并请他到车站去接华。1931 年 8 月华罗庚来到清华园。华罗庚一到清华，熊庆来立即接待了他。看到华罗庚虽腿有残疾，身体羸弱，面有菜色，但是才思敏捷，应对自如，心中暗忖："此青年他日将为异军突起之科学明星！"

难题来了，给华罗庚一个什么职务呢？那时的清华大学教师分为助教、教员、讲师、副教授和教授五级。当助教需要大学毕业，华罗庚只有初中毕业学历，连当助理员也有困难。因为当助理员也得高中毕业。熊庆来决定破格安排华罗庚在系里当助理员。工作是整理图书资料，收发文件，代领文具，绘制图表，通知开会等杂务。因为当时系里的教师和学生人数不多，工作不重。工作之余可以去听课和自修。工资每个月 40 元，比金坛初中时多了一倍还多。对于才华超群但只有初中学历的华罗庚，这无疑是绝妙的安排。华罗庚办公就在熊庆来办公室的外面——图书室。大家来见熊庆来，就会碰到华罗庚。没有多久，华罗庚跟系里同仁相处得很熟了，还结交了不少外系的朋友，俨然成为系里的重要一员。凡数学讨论，系内人事，他无不参与。

华罗庚刚来的时候，系里图书资料散乱一地。华罗庚很快就把它们一一归类整理，搞得井井有条。做到"闭着眼睛也能把书找到"。系里人人都十分满意。其实最高兴的还是华罗庚自己，因为他在金坛翻过来覆过去看到的只有《大代数》、《解析几何》和《微积分》3 本书。那时清华大学数学系的图书虽然算不上丰富，但是在华罗庚的眼里却已是"琳琅满目，美不胜收"了。他像一块吸水的海绵，以惊人的速度把它们消化吸收。许多在金坛苦苦思索的问题现在都迎刃而解，大量新的更迷人的问题又摆在面前。生活是那样的紧张而充实。他恨不能把一天的时间变成两天来用。

当时清华年轻人中聚集了许多全国的精英，像数学系的陈省身与许宝騄，以及柯召、吴大任、徐贤修和段学复等，物理系的王竹溪、赵九章以及钱三强、彭恒武等。与济济英才朝夕相处，耳濡目染，华罗庚深受启发和激励，每有重要书籍出版，他都喜欢与朋友切磋讨论，所以提高很快。他决心加倍努力，“人家每天 8 小时的工作，我要工作 12 小时以上才觉得安心”。他发奋用功的精神，使同辈人深受感动。

刚来的时候，熊庆来让华罗庚去听听解析几何和微积分课。后来他很快发现华罗庚不但不必去听解析几何和微积分，即使对算学分析也已有一定了解。于是他叫华罗庚到自己的算学分析班来听课。当时算学分析的教授是熊庆来、杨武之和孙光远；听课的有五个人：陈省身和吴大任是研究生，柯召和许宝騄是转学来的高年级学生，再加上助理员华罗庚。后来，熊庆来在备课遇到疑难或他做不出习题时，就在办公室里叫道：“华先生请过来一下，看这个题目怎么做。”而华罗庚每次总不会让熊庆来失望。

华罗庚还听了杨武之开的“群论”课并跟杨武之学习数论，即用初等方法来研究堆垒数论问题。堆垒数论是数论中的一个分支，著名平方和问题，哥德巴赫猜想问题，华林问题和塔里问题，都是它的研究对象。杨武之支持华罗庚学习和研究哈代与李特尔伍德的堆垒数论的崭新的分析方法——圆法。华罗庚十分感谢杨武之①的启发和指导，曾说过：“古人云生我者父母，知我者鲍叔，我之鲍叔乃杨师也。”

除了听课，他还博览群书，特别是数论的著作，像希尔伯特的《数论报告》，他读完后还将它译成了中文。还有兰道的《数论教程》，篇幅浩繁，他反复钻研达到融会贯通。

学术上要攀登世界高峰，外语必不可少。华罗庚在上海中华职

---

① 杨武之（1896-1973），1928 年在美国芝加哥大学获数学博士学位。清华大学教授。在熊庆来出国期间代理数学系主任。

业学校只学过一年英语，当然远远不够。到1934年，经过短短的几年，华罗庚不仅能看英文的数学专著，还可以用英文写论文。他学习英文的方法很独特。他说："我阅读外文书籍，多半用猜测方式去了解。阅读时，怕影响注意力，暂不翻字典。全篇读完后，再查字典。结果发觉自己都猜对了。后来读得多了，就完全用猜想法，也就不再查字典了，可以顺利地一直读下去。"许多人花费大量时间都攻克不了的外文关，被聪明过人的华罗庚轻而易举地征服了。他还用这个方法掌握了德语和法语。

华罗庚在清华这5年，是他自学最主要和最成功的时期。在金坛的时候，他在《科学》上一共发表了6篇论文，都是初等数学的习作。经过清华的5年自学，在与师长和朋友们的切磋和帮助下，特别是他博览群书，刻苦钻研，他的水平有了极大提高。

当时的清华大学数学系属初创期，教师均以教学为主，研究工作屈指可数。经过头两年的努力，华罗庚脱颖而出。他又开始在数学杂志上发表论文了。由于他绝顶聪慧，有敏锐的数学直觉，领悟力极强，信手拈来，皆成佳作。从1934年起3年内华罗庚共发表了21篇论文，数论14篇，代数4篇，分析3篇。除了国内发表的4篇外，其余均在国外杂志发表。其中一篇发表在德国《数学年鉴》上，该杂志是当时世界上最重要的数学杂志。那时候，中国近代数学的研究刚起步，中国人写的数学论文在国外发表者更是寥若晨星。华罗庚每年发表这么多文章，令清华的师长和朋友们刮目相看。华罗庚这些文章与金坛时期的文章相比，无疑已不可同日而语，但与国际先进水平相比，还有一定差距。研究课题较散乱，还不属数学的主流或重大课题。

看到华罗庚的才能，系里想让他教微积分。难题又来了，当助教要大学毕业，华罗庚的学历不够。更困难的是，助理员是职工编制，而助教是教师编制。要从职工系统调到教员系统几乎是不可能的事。这里，中国数学界的前辈们为我们树立了良好的榜样。他们所考虑的只有一条，胜任还是不胜任？为了中国数学的发展，一切

的限制和障碍，应当统统推倒。曾任清华大学教务长和数学系主任的郑桐荪①说："这样有才气而多产的数学家，应以全力支持他成功。"由郑桐荪力主，代理主任杨武之赞同，理学院院长叶企孙最后拍板，一槌定音："清华出了一个华罗庚是件好事，不要被资格所限定。"1933 年清华破格提拔华罗庚为助教。1934 年委任华罗庚为"中华文化教育基金会董事会"乙种研究员。1935 年再次破格提拔华罗庚为教员。

1935 年 7 月，《中国数学会》在上海举行成立大会。《中国数学会学报》（简称《学报》）和普及性的《数学杂志》先后创刊。《学报》的创立是中国数学界开始走向独立和成熟的一个里程碑。中国数学会委任苏步青（1902-2003）为《学报》总编辑。苏步青于 1931 年获日本东北帝国大学博士学位，微分几何学家，是中国数学界领导人之一。他挑选华罗庚作为他的助手，担任助理编辑。

名声鹊起

1935 年，应清华大学邀请，著名的法国数学家阿达玛②和美国数学家维纳来中国讲学。

阿达玛工作面很广，在解析函数论、数论、泛函分析、常微分方程和偏微分方程等领域都有杰出成就。年已古稀的阿达玛到达清华时，熊庆来主持了北平数学界欢迎阿达玛大会。当时北平的数学教授中，做研究工作的还很少。在介绍这些教授的专业时，只能含糊地说"一般数学"。最后介绍到职位最低的华罗庚，华罗庚手里拿了一叠发表的论文并告诉阿达玛："我在研究华林问题"，阿达玛异常惊喜。他建议华罗庚研究苏联数论大师维诺格拉多夫（1891-

---

① 郑桐荪（1887-1963），清华大学算学系的创办人之一，早年留学美国，获康奈尔大学学士学位。

② 雅克·萨洛蒙·阿达玛（1865-1963），在泛函分析，微分方程和数论诸多领域均有重要贡献。

1983）的方法，因为这种方法是研究这个问题的主要方向。他还介绍华罗庚直接与维诺格拉多夫通信。这些意见对华罗庚的研究工作无疑产生了重要影响。华罗庚从此与维诺格拉多夫直接联系，经常收到他寄来的单印本，大大改善了华罗庚的学习条件。

美国数学家维纳是控制论的创始人，在概率论、布朗运动理论、调和分析与一般陶伯型定理等领域有突出贡献。维纳是美国科学院院士并获得过许多荣誉头衔。他年轻而热心，对聪慧过人、才思敏捷的华罗庚十分赏识。两人的关系相当密切。据当时听课的人回忆，只要华罗庚有些“异常反应”——一声咳嗽或摇一摇头，维纳就会问华罗庚：“我错了吗？”这时候华罗庚会站起来指出，哪儿的推导出了差错。华罗庚从维纳那里学到了大量傅里叶分析的技能与知识，对他后来的研究很有帮助。在维纳的指导和帮助下，他与徐贤修合作撰写了一篇关于傅里叶变换的论文。

维纳极力推荐华罗庚到英国剑桥大学的哈代那里去继续深造。那里是世界解析数论的中心之一。他自己就曾经是哈代和李特尔伍德的学生。他们两人是堆垒数论的新方法——圆法的创始人与开拓者。华罗庚在人生道路上又面临一次选择：一是留校升讲师，一是出国留学。他没有犹豫。他十分清楚，最终使他的命运摆脱困境的那篇发表在《科学》上关于代数五次方程的“华文”，对于他个人固然是件好事，但也反映了当时中国数学的落后状况。他不能因为自己的生活现在已有很大改善而心安理得地放慢前进的步伐。他要竭尽全力去攀登世界高峰，不辜负一直关心照顾和栽培自己的师长们的殷切期望，力争在数学上做出更大成绩，为国争光，使中国有朝一日也能跻身世界数学大国以至数学强国的行列。

为了中国数学的未来，清华大学积极支持并帮助华罗庚实现去剑桥进修的愿望。

外国著名数学家阿达玛和维纳来中国讲学的消息，吸引中国报纸做了不少的报道，年青的华罗庚的传奇式的经历也开始被社会所了解和津津乐道。

攀登新高峰

1936年夏，华罗庚得到中华文化教育基金会每年1200美元的乙种资助，以访问学者的身份赴英进修。刚好周培源因休假结束要回美国普林斯顿高等研究院继续做研究工作，于是两人结伴同行。这给华罗庚带来了很多方便也大大减轻了旅途的劳顿。

到剑桥的时候，哈代正在美国旅行。看了维纳的推荐信和华罗庚的论文，哈代在行前曾留一张纸条给同事海尔布伦："华来时，请转告他，他可以在两年之内获得博士学位。"海尔布伦问华罗庚："你打算攻读哪一门课程？我们将帮助你。"

华罗庚回答说："谢谢你的好意。我只有两年时间，我不想念博士学位，只想多学点东西。"

海尔布伦深感意外。通常来英国的留学生，总是先补习英文，再听一两门课，最后写一篇文章，得一个学位。从东方来的青年，居然不稀罕堂堂剑桥大学的博士学位！华罗庚无疑是第一个。海尔布伦真诚地说："我们欢迎你这样的访问学者。"

当然，华罗庚绝不是瞧不起或者不想要博士学位。后来，有朋友问起他："你一年完成了11篇论文，每一篇都能获得博士学位，你为什么没有去申请呢？"

华罗庚笑笑说："钱不够呀，学费极贵，也就算啦。"

这也难怪。华罗庚要负担拖儿带口的一家，哪里交得起昂贵的学费？当然他可以向中华教育基金会申请补助。但是，他没有这样做。这不符合他的性格。所以他在剑桥始终没有办理正式入学手续，却充分利用剑桥的良好环境听了七八门课，记了一厚叠笔记，写了10多篇文章。

在剑桥大学，他的水平跃上了新的台阶，他真正作出了世界第一流的工作，引起了国际上的重视，达到他一生中的第一个高峰。当时的一些工作，经历了半个多世纪的考验，已成为经典文献，至

今仍然作为定理，整章地写在国外近年出版的数论专著上面。

在高斯一章中多次提到的“二次互反律”，高斯称它为“黄金定理”。对这个定理他先后作出 7 个证明，其中第四个证明是用所谓“高斯和估计”来证明的。三角和比高斯和更为广泛。由于三角和估计在解决数论中若干非常重要问题时极为有用，对它的研究吸引了广大的数论学家。1937 年华罗庚对完整三角和的研究取得重大进展。

1908 年，希尔伯特解决了华林猜想，但是方法十分复杂。20 年后哈代和李特尔伍德利用圆法改进了华林定理的证明，得到比希尔伯特更深刻的结果。后来维诺格拉多夫对圆法作了改进。1938 年华罗庚对哈代和李特尔伍德关于华林问题的结果加以改进和简化。在这个过程中他得到了一个重要不等式——华氏不等式。这个不等式在数论的专著中经常被引用。

在建立华氏不等式后不久，华罗庚又在著名的布劳赫——塔里问题上取得重大进展。他用很初等的方法，未引用一篇参考文献，只用了六页篇幅，就把赖特在这个问题上的结果大大改进了。

华罗庚在攻克哥德巴赫猜想上也取得进展，得到了对于任何正整数 k，几乎所有偶数 n 均可表为一个素数及一个素数的 k 次方之和，即

$$n = p_1 + p_2^k。$$

这一连串的结果，使他的脑海中形成了一幅以研究华林——哥德巴赫问题为中心他称为“堆垒素数论”的宏伟蓝图。

这时华罗庚正处于创造力的高峰。他收到苏联科学院的邀请，请他到解析数论的另一个中心——苏联访问和工作。但是，“七七事变”爆发，抗日的烽火燃遍祖国大地。华罗庚坐不住了。在祖国的河山和百姓遭到日本侵略军恣意蹂躏的时候，他怎能继续在剑桥潜心研究？他决定立即回国，共赴国难。

华罗庚离开前向老师哈代报告了自己关于三角和估计、华林问题和塔里问题的结果。哈代听后非常高兴，后来在哈代和赖特合写

的名著《数论入门》中提到了华罗庚的几个结果。这大概是近代中国数学家最早被外国名家引用的结果。

艰苦岁月

1938年的伦敦，阴云低垂，凉意袭人。华罗庚乘船踏上归国的旅途。从伦敦到当时清华大学所在地昆明，迢迢万里，一路的艰辛。吴筱元带着母亲与女儿已先期在杨武之、熊庆来等人的帮助下，安顿了下来。

此时，虽然华罗庚的学历依然是职高一年级，但是在数学界的学术地位已很少有人可以与他匹敌。西南联大教授聘任委员会继承清华的优良传统，打破清规戒律，在著名物理学家吴有训和杨武之主持下一致同意华罗庚的正教授资格。从职高一年级到正教授，屈指算来只用了7年，真可谓是破天荒的奇迹。

当时只要天晴，天天有日寇的飞机来狂轰滥炸。由于防空力量薄弱，飞机飞得很低，几乎看得见飞机上的“鬼子”。有一次，他到防空洞去找数学家闵嗣鹤（1913-1973）讨论问题。突然，一串炸弹在洞口爆炸开来。黄土铺天盖地落下来把洞口都堵上了。大家的半截子身体被埋在土里。华罗庚的耳朵也被震出了血。

经过这一次劫难，华罗庚决定搬家。闻一多得知后热情邀请华罗庚与他同住。闻家有8口人，住得本已相当拥挤，现在又有华家6口来同住，其拥挤可想而知。两家没有墙壁，就挂一条床单隔开，华家住里间，闻家住外间。两家人相互照顾体贴，十分融洽。

白天出去躲警报，在野地里备课，做研究，一直到傍晚才回家。华罗庚全家住的房子，还没有现在办公室大。吃、睡、看书、做研究都在这里。晚上没有电灯。所谓灯，就是一个破香烟罐，上面放一个油盏，把破棉花捻得细细的做灯芯，以节省菜油。

住在远离学校10多里的地方，对于腿有残疾的华罗庚来说往返十分不便。汽车和吉普车是有的，但都是当官的和有钱人享用的。

教授和普通老百姓就只有坐牛车了。由于路面崎岖不平，牛车颠簸摇晃。乘客坐在木板上双脚下垂，坐不了10分钟，就腰酸背痛了。所以有课的时候，华罗庚就住在单身宿舍里。教授3人一间。华罗庚与陈省身、王忠信同住一个房间。

大后方物资匮乏，物价飞涨。靠薪水度日的教授，生活异常艰苦。当时有句顺口溜："教授教授，越教越瘦。"连要饭的也知道教授的身上没有钱。为了补贴生活，闻一多挂牌雕刻图章，吴大猷养猪，华罗庚到中学兼课，有时做做家庭教师。

生活是困难的，但是大家都情绪高昂，坚信抗战必将胜利。人人勤奋工作，刻苦钻研，准备好胜利后报效自己的国家。

战火中的珍珠

当时的西南联大聚集了全国一大批精英。在数学系中尤以系中"三杰"最为突出，他们是华罗庚、陈省身（1911-2004）和许宝騄（1910-1970）。陈省身在纤维丛与微分流形的整体性质研究方面有开拓性工作，他提出的示性类有力地推动微分几何与代数拓扑发展，为世界数学进步作出重要贡献，1983年获沃尔夫奖。许宝騄则在数理统计方面得到国际先进的深刻结果。每学期，华罗庚他们总要争开新课。这样，虽然是辛苦了一点，但培养了学生也提高了自己。华罗庚先后开设过"解析数论"、"连续群论"、"行列式与矩阵"、"复变函数



陈省身

论”与“近世代数”等多门课程。除了讲课，还组织各种讨论班，如“群论”讨论班，还与陈省身、物理系的王竹溪一同主持“李群”讨论班。在当时讲授李群无论是国际还是国内都是很先进的。

抗战期间，信息不畅，文献资料奇缺。大家立足于自己原始的思想，奋力开拓，创造出令人惊叹的成绩。

在课余，华罗庚首先抓紧时间把自己在剑桥大学构思的《堆垒素数论》的宏伟蓝图付诸实施。到1940年，《堆垒素数论》终于完成。华罗庚立即将原稿交有关部门出版。没有想到的是，由于当时的混乱，更由于当事人的漠视，这部倾注了自己多少个日日夜夜心血的书稿被搁置了一段时间后竟然丢失了！华罗庚听到这一消息真是捶胸顿足，欲哭无泪！无奈之下，他只得夜以继日地加班写出第二份手稿，把它寄给苏联的维诺格拉多夫。维诺格拉多夫见到书稿，欣喜异常。他给华罗庚回了电报，承诺“你的优秀专著战争结束后立即出版”。当时苏联红军正处在最危难时期，而且该原稿还须翻译成俄文才能出版。因此维诺格拉多夫作出这样的承诺是多么不容易！维诺格拉多夫没有食言。1947年卫国战争一结束，《堆垒素数论》俄文版即以苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所第22号专著出版。

新中国成立后，1953年，在中国科学院督促下，中文版由俄文版翻译过来出版。1957年，华罗庚对《堆垒素数论》作了修订。1959年修订本译成德文和匈牙利文出版。接着英文版和日文版相继出版。《堆垒素数论》的出版引起世界数学界的注意。半个世纪以来，这本书已成为数论学家经常征引的经典文献。

《堆垒素数论》完成后，华罗庚立即开始新的开拓。他的下一个目标是把复变函数单变数的结果推广到多变数。他熟悉西格尔的工作和他的矩阵方法。他善于用初等方法和直接方法去处理数学问题，也善于用几何和分析做背景来处理代数问题，又善于用代数工具来处理几何与分析问题。华罗庚以自己独特的风格将自守函数论、矩阵几何学、典型群论与多复变函数论放在一起研究。这是有自己

特色的开拓性工作。解放后他把这方面的工作进一步完善和提高。1957年，专著《多复变函数论中的典型域的调和分析》出版。同年华罗庚的“典型域上多复变函数论”获中国科学院颁发的科学奖金一等奖。菲尔兹奖得主丘成桐认为，华罗庚最大的数学成就，当推多复变函数论。他认为华在数论方面的贡献是大的，可是他在这方面的工作还不能左右全世界数论方面的发展，而他在多复变函数方面的工作比西方至少早了10年，而且这些成就是在战火纷飞，生活极端艰苦的情况下取得的。

访问苏联

抗战胜利不久，1946年，华罗庚应苏联科学院和苏联对外文化协会邀请，离开昆明前往苏联访问。邀请中国学者，前往苏联讲学，这是从未有过的，给国家增光的大喜事。

华罗庚受到苏联数学家的热烈欢迎和隆重接待。他会见了神交已久的维诺格拉多夫和柯尔莫哥洛夫[①]等几乎所有享有国际声誉的苏联数学家，还会见了旅苏波兰数学家瓦尔菲茨。

华罗庚花了几天时间对《堆垒素数论》的校样作了校对。苏联数学家熟悉华罗庚在解析数论方面的工作，并不知道他在昆明的主要研究方向已经改变。所以他在苏联的学术报告着重讲“矩阵几何”、“自守函数论”和“多复变函数论”，还作了中国数学史的报告。苏联数学家对华罗庚和许多中国学者在异常艰苦的环境下坚持研究工作并且做出如此优异的成绩，感到由衷的钦佩。

一个星期天，华罗庚去听了柯尔莫哥洛夫和亚历山大罗夫给参加数学竞赛活动的师生的演讲，题目是“对称性”和“复虚数”。演讲大厅里济济一堂，座无虚席。著名数学家给十五六岁学生作演

---

① 安德烈·尼古拉耶维奇·柯尔莫哥洛夫（1903-1987），在纯粹和应用数学诸多领域有重大贡献的大数学家。

讲，传播数学的种子，他们诲人不倦的精神使华罗庚深受感动。

3个月的苏联访问愉快地结束了。华罗庚的心中不仅留下了苏联数学家对他和中国数学家的深情厚意，也开始构思未来中国数学研究所的模式和中国数学的发展蓝图，包括数学普及和在青少年中举办数学竞赛活动。

赴美考察

原子弹爆炸，促成了日本无条件投降。这一事件深深触动了国民政府。1945年11月军政部长陈诚和次长兼兵工署长俞大维邀物理学家吴大猷、化学家曾昭抡和华罗庚去重庆商量发展国防科技事宜。商量的结果是：军政部向学校借聘吴大猷、曾昭抡和华罗庚3人，再由他们遴选并率领数、理、化优秀青年，出国研习，为期两年。这些优秀青年是数学孙本旺、物理李政道和朱光亚、化学王瑞駪和唐敖庆。俞大维与华罗庚的相识还有一段有趣的故事。

俞大维浙江山阴人，早年在哈佛大学攻读数理逻辑，获得博士学位。因成绩优异，获哈佛奖学金到柏林大学深造。1925年，俞大维曾有一篇数理逻辑的文章登在德国的《数学年鉴》上。10年后他得知中国有了第二个人在《数学年鉴》上发表文章，这个人就是清华大学教员华罗庚。两人神交已久，但从未谋面。1943年时任兵工署长的俞大维终于与华罗庚见面，俞十分欣喜。寒暄后，俞大维对华罗庚说："我有一个数学难题，请教过许多外国专家都无结果，今晚请你到舍下便餐，我将这一难题交给你。若数月内能解决，我将万分感谢！"餐后华罗庚将"难题"带回。次日清晨华罗庚自厕所出来，将答案写在一张手纸上，轻松地解决了"难题"。俞大维看后大为惊喜。中外专家久久解决不了的难题竟被华罗庚一夜之间解决了。俞大维对华罗庚十分佩服，从此对他倍加爱护和关照。

华罗庚赴美前夕，在上海接受记者赵浩生的采访。在问到"科学和政治能不能分开"时，华罗庚严肃沉重地说：

“科学与政治实在无法分开，但在中国的科学研究者，一定要努力设法使政治与科学分开，非如此挣扎，不能有些微的成就。这是科学研究者最大的苦闷。”他憧憬着祖国真正开始大规模和平建设的那一天的到来。

1946年9月，华罗庚赴美考察。

在美国，华罗庚在普林斯顿高等研究院做研究工作，同时在普林斯顿大学数学系教授数论。普林斯顿坐落在新泽西州秀丽的米尔斯通河畔，环境幽静而美丽。普林斯顿高等研究院学术气氛浓厚，是世界最高数学学府之一。这里会集了像外尔、西格尔[①]、冯·诺伊曼、哥德尔、赛尔贝格等众多世界一流的大数学家。华罗庚的刻苦用功，一如既往，是远近闻名的。他在讲课之余，常常在研究院报告他的最新成果。美国各大学也纷纷请他去演讲。

美国的朋友很关心华罗庚的腿疾。在苏联访问的时候，苏联的朋友曾提议在他们那里动手术。后因为时间仓促，手术没有实行。一次在麻省理工学院讲学的时候，该院的勒文逊教授给华罗庚介绍他的好友——霍普金大学医学院一位著名的外科医生，建议他在那儿动手术，以割除令他痛苦了18年的痼疾。华罗庚欣然应允。经过四个多小时的手术，大腿骨与骨盆间的一个肉瘤顺利切除。经过四个多月的调养，左大腿弯曲部分终于纠正过来。从此，他只要在左脚穿高一点的鞋就可以了。为了活动筋骨，他开始学游泳，还故意多走许多的路。

在美国，他的研究工作取得丰硕成果。他进一步完善了维诺格拉多夫的方法，继续在昆明时已经开始的典型群的研究并取得许多重要结果。他在美国最突出的成就是对无限维代数即“体”论的研究，得到一系列惊人的定理。

这里流传着许多有关华罗庚的小故事。一位美国朋友被一个数

① 卡尔·路德维希·西格尔（1896-1981）是德国数学家，在数论，多复变函数，天体力学诸方面有重要贡献，获首届沃尔夫奖。

学难题所困，苦思不得其解，甚至说："谁帮我解决这个问题，我就请他吃无穷多餐饭。"华罗庚知道后，边吃饭边思考，吃完饭，答案也出来了。他立即打电话把结果告诉这位朋友。于是有"一顿饭解决一个难题"的佳话。

还有一次，数学家卡普兰斯基对体的半自同构定理想了很久，不能完全解决。他虽得到一个结果，但证明十分麻烦。他对华罗庚说："你能不能把我的漂亮定理的证明加以简化呢?"华罗庚听后心里想，我何必简化它呢？我要完全解决这个问题。果然，他的证明写出来不到两页纸。芝加哥大学邀请他去演讲。通常演讲是一个小时，可是华罗庚这一次只讲了一刻钟就完满解决了！

华罗庚多次提到，有一次韦伊①在听了华罗庚的演讲后评论道："华玩弄矩阵就像玩弄整数一样。"华罗庚认为这一评论说到了点子上，韦伊不愧是了解他的知音。

华罗庚，一位数学奇才，这时已成为享誉世界的大数学家。

报国心切

1948 年春，华罗庚应伊利诺大学之聘，赴乌尔班纳。伊利诺大学对华罗庚十分器重。除聘任他为正教授，还让他挑选两位杰出的青年数学家做他的助手，想把伊利诺大学办成研究代数的中心。同年吴筱元携 3 个儿子来美与华罗庚团聚。这也是他平生第一次过上安定的居家生活。

同年，在中央研究院代院长朱家骅主持下，华罗庚被选为第一届中央研究院院士。

这时，华罗庚时刻关注着国内局势的发展。华罗庚曾不止一次地向美国朋友谈起中国的数学和他的抱负。他认为，中国是一个大

① 安德烈·韦伊（1906-1998）是法国著名数学家，在代数数论与代数几何上有重大成就，著名布尔巴基学派主要成员，沃尔夫奖得主。

国，有悠久的文明历史。中国人丝毫不比别人笨。即使在抗日战争这样困难的条件下，中国的知识分子也取得了骄人的成绩。我们的落后主要是政治上的原因。我们一定要赶上去。而且我们一定能赶上去。

1949年10月1日，新中国成立。华罗庚再也坐不住了。他要回国！伊利诺大学千方百计挽留他，甚至提出："不妨你先回去看看，儿子留在这里由伊大来照料。"

但是，华罗庚的决心已定，绝不动摇。临行前他预定了《数学评论》、《数学学报》等几种重要杂志。这些杂志对初创的中国科学院数学研究所发挥了重要作用。他归心似箭。连一部分薪水也来不及取，即与吴筱元携3个儿子从旧金山乘船经香港回国。在香港，他发表了《致中国全体留美学生的公开信》。信中披露了他决定回国的心路历程，词真意切，发自肺腑：

"我们怎样出国的？也许以为当然靠了自己的聪明和劳动，才能考试获选出国的；靠了自己的本领和技能，才可能在这儿立足的。因之，也许可以得到一结论：我们在这儿的享受，是我们自己的本领，我们这儿的地位，是我们自己的努力。但据我看来，这并不尽然，何以故？谁给我们的特殊学习机会，而使我们大学毕业？谁给我们所需的外汇，因之可以出国学习？还不是我们胼手胝足的同胞吗？还不是我们千辛万苦的父母吗？受了同胞的血汗栽培，成为人才之后，不为他们服务，这如何可以谓之公平？如何可以谓之合理？

"总之，为了抉择真理，我们应当回去；为了国家民族，我们应当回去；为了为人民服务，我们也应当回去；就是为了个人出路，也应当早日回去，建立我们工作的基础，为我们伟大祖国的建设和发展而奋斗！"

1950年4月12日，华罗庚愉快的给维诺格拉多夫写信：我非常高兴地告诉你，我已辞去我在美国伊利诺大学教授职务，现在已在为我的祖国服务了。我又重新担当起了位于中国北京的清华大学教授职务。

万紫千红才是春

时隔17年，华罗庚豪情满怀，再一次登上清华大学的讲台。这一次他教授他的研究心得《典型群》。他要实践他的誓言，培养青年人才，改变中国数学的落后面貌，为祖国建设服务。他的讲课条理分明，深入浅出，引人入胜，深受学生的欢迎。

1953年，中国科学院数学研究所成立，华罗庚被任命为所长。同年，因“向苏联学习”，各高等院校搞院系调整，清华大学数学系划归北京大学。从此，华罗庚的工作重心就转到了数学所。

数学所下设两个组：数论组和微分方程组。数论组组长由华罗庚兼任。这时候，华罗庚考虑的已不仅仅是他个人的研究成果，他更关心的是如何培养人才。他清醒地意识到，一个人的影响毕竟有限。如果能组织起一支既有深厚理论基础又有独立研究能力的浩浩荡荡的数学大军，那么，中国数学的面貌何愁不日新月异?

1953年冬，数论组在华罗庚主持下开设了两个讨论班：“数论导引”和“哥德巴赫猜想”。

关于“数论导引”，华罗庚早在西南联大教授数论时就曾计划写一本书，无奈当时条件恶劣，根本不可能出版，因此也就没有写出来。后来在美国执教时他又补充和改写了一些。考虑到建国初期，这类参考书奇缺，华罗庚就萌发写一本全面介绍数论的参考书。

《数论导引》的头6章由华罗庚写好后以很快速度讲了一遍。后十四章，难度加大，讲的速度大为放慢。为保持全书的统一和连贯，从此，华罗庚先写出百分之六七十，其余部分，指定一人负责补充。由越民义审核、修改、补充后交华罗庚定稿。由于参加者齐心协力，全身心的投入，洋洋66万多字的《数论导引》仅用了两年多一点的时间就出色地完成了。1959年正式出版，受到国内外的一致好评。

通过讨论班，参加者对数论有了全面的了解，还掌握了一些数

论研究的基本方法。他们的能力得到锻炼，水平有了提高，而且还写出了书，使没有参加讨论班的也能受益。

华罗庚把“哥德巴赫猜想”选为讨论班的主题，是有深意的。哥德巴赫猜想优美无比，它的解决与解析数论的所有重要方法都有联系。通过哥德巴赫猜想可以学会解析数论的所有重要方法。在这个基础上，再学一点代数数论，就可以把解析数论的结果推广到代数数域。这一方向就是解析代数数论。

哥德巴赫猜想讨论班计划分四个单元。到1957年，已完成一、二、四单元，因为“反右斗争”，讨论班的研究被迫中断了。

除了数论讨论班，为培养年青一代，仿照《数论导引》模式，他还组织了《典型群》和《多复变函数论》两个讨论班。

讨论班培养了一批人才，也写出了专著。华罗庚与他的学生万哲先合著的《典型群》在1963年出版。万哲先成为华罗庚在代数方面的继承人，对发展中国代数学及其应用作出了突出贡献。华罗庚《多复变函数论中的典型域的调和分析》以中国科学院数学研究所甲种专刊第4号于1957年出版。他在多复变函数论与分析学方面的继承人是陆启铿和龚升，他们为中国分析学的发展作出了突出贡献。

应《德国数学百科全书》编委会之邀，1954年华罗庚开始撰写《指数和的估计及其在数论中的应用》。写的方法与《数论导引》相同，每一章由他本人用英文写出百分之六七十，余下部分分别由越民义和王元补充，写出初稿，最后由华罗庚定稿。1959年德文版正式出版。接着中文版和俄文版相继出版。十分难得的是维诺格拉多夫亲自为该书写了一篇附录。该书出版后，受到广泛好评，并成为同行征引的重要文献。

播撒种子

华罗庚清醒地意识到，要使中国数学达到世界先进水平，只有个别或少数的几位突出的具有国际声誉的数学家，就像我国目前的

状况，是远远不够的。只有当中国的数学朝着“质高，量多，方面宽”的方向健康蓬勃地发展起来，才能算达到世界先进水平。因此不能仅仅靠办几个讨论班写几本专著来培养人才，还要把热爱数学的种子播撒在全国青少年的心田。他没有忘记访问苏联时，亲眼看到的大数学家为中学教师和参赛选手作通俗演讲的动人情景。这些演讲最后还撰写成普及读物在全国发行。

1956 年，华罗庚仿照苏联的模式，提出全国举办中学生数学竞赛活动。这一倡议得到了数学界的积极响应。许多著名的数学家和青年数学家一道热情地参与这项活动。经过紧张筹备，这一年在北京、上海、天津和武汉四大城市举行了竞赛活动。

在北京，竞赛前由华罗庚亲自向参赛学生和他们的老师作题为“从杨辉三角谈起”的报告。他既传授知识也讲究思考方法同时又进行爱国主义教育，深入浅出，引人入胜，大受师生们的欢迎。竞赛优胜的选手将被免试送入志愿的大学数学系继续深造。演讲的内容撰写成小册子在全国发行。这一活动有力地促进全国中学数学素质的提高。1957 年，数学竞赛活动更扩大到南京等大城市。

但是好景不常。一场全国范围的轰轰烈烈的反右派斗争和随之而来的大跃进中断了方兴未艾的数学竞赛活动。直到 1962 年才恢复。那年华罗庚亲自讲“从祖冲之的圆周率谈起”，并写成小册子。可是到 1965 年，文化大革命开始，竞赛被指责为“天才教育”、“培养修正主义苗子”，活动被迫停了下来。好容易等到文化大革命结束，数学竞赛才得以恢复。

华罗庚以极大热情参与这一活动。除了上述两本小册子，他还先后写了《从孙子的“神奇妙算”谈起》，《数学归纳法》和《谈谈与蜂房结构有关的数学问题》等，这些书都是根据他在数学竞赛活动中演讲写成的。关于《数学归纳法》还有一个小故事。50 年代匈牙利数学家图兰访问中国，在一次演讲中讲了中国清代著名数学家李善兰（1811-1882）的一个恒等式：

$$\sum_{j=0}^{k}(C_k^j)^2C_{n+2k-j}^{2k}=(C_{n+k}^k)^2。$$

图兰用较高深的数学知识作了证明。华罗庚听了以后心中感到很不是滋味。难道中国先辈提出的恒等式中国人自己证明不了？华罗庚苦苦思索，终于在图兰回国前给了他一个漂亮的而又初等的证明。华罗庚把李善兰恒等式和他本人的证明写进了小册子《数学归纳法》之中。

1978 年，年近古稀的华罗庚再次出任竞赛委员会主任，亲自主持命题、监考和阅卷工作，还为《全国中学数学竞赛题解》写了长达 7000 字的"前言"，认为活动的影响遍及全国，意义深远，他本人的体会一言难尽。这一次，活动的规模空前，北京、上海、天津、陕西、安徽、辽宁、四川和广东八省市都举行了竞赛。

从 1956 年到 1978 年，数学竞赛总共只进行了 6 次，停止活动竟达 16 年之久。这不能不说是极大的遗憾。这期间数学竞赛活动所遭遇的时断时续，忽冷忽热，跌宕起伏的状况，从一个侧面反映了华罗庚和中国数学当时所处的外部环境。

哥德巴赫猜想

经过几年的努力，中国数学的研究工作已初具规模，涌现出一批优秀的人才和喜人的成果。为检阅力量，争取在 12 年内赶上国际先进水平，1956 年 8 月 13 日到 19 日，全国数学论文报告会在北京大学举行。8 月的北京，晴空万里，和风拂面，未名湖畔，旗帜招展，一派喜气洋洋。这是一个规模空前的大会，一个检阅力量的大会，更是一个向科学进军的誓师大会。参加大会的约 100 人，近半数为年轻人。会议共宣读论文 170 多篇，其中年轻人的论文占了很大比重，他们都是建国后大学毕业，由国内自己培养的数学家。像吴文俊、廖山涛、秦元勋[①]等当时才 30 多岁。

---

① 吴文俊（1919- ），在代数拓扑、机器证明上有领先世界的重要成就；廖山涛（1920-1997），在动力系统理论研究有重要成就；秦元勋（1923- ），在微分方程研究有重要成就。

华罗庚在会上作了两个报告："指数函数与解析数论"和"典型域上的调和分析"。"指数函数与解析数论"是根据他的著作《指数和估计及其在数论中的应用》后面一张附表"重要问题索引"来讲的，实际上是一个解析数论的近况报告。在报告结尾时，华罗庚幽默地指出："无论任何人，只要他能把现有的结果稍微推进一步，他就是世界记录的保持者。"他的话极大地激励了与会的代表。

受邀参加大会的代表中，有一位青年名叫陈景润。陈景润1933年生于福建省福州市，酷爱数学，终日刻苦钻研，如醉如痴。1953年毕业于厦门大学数学系。毕业后，被分配到北京四中教书。因不适合教书工作，被学校辞退。厦门大学校长王亚南了解陈景润性格怪癖，教书是不适合，但是数学钻研颇深，说不定在数学上能搞出些名堂。因此把他调到厦门大学管理图书资料。



陈景润

厦门地处海防前线，那几年，常有空袭警报。陈景润将华罗庚《堆垒素数论》拆开，一张张放在身上，以便随时学习，就像当年的狄里克雷研读高斯的《算术研究》，外尔阅读希尔伯特的《数论报告》。多年的努力终于有了成果。陈景润发现《堆垒素数论》还有改进的余地。如可以用书的第五章的方法来改进第四章的某些结果。他把自己的心得寄给华罗庚。华罗庚立即将陈景润的稿子交数论组审阅。大家确认陈景润是对的。华罗庚十分高兴。他感到陈景润肯钻研，有培养前途，感慨地对身边数论组的年轻人说："你们呆在我的身边，倒让跟我素不相识的青年改进了我的工作。"

陈景润一到北京，负责会务的王元立即带他去见华罗庚。陈景润平时很少与人交往，见到鼎鼎大名的华罗庚不知说什么好，只是不停地说："谢谢华老师，谢谢华老师！"华罗庚看出陈景润不善言词，并不介意，笑着对他的到来表示欢迎，还说了些鼓励的话。

第二年，华罗庚调陈景润到数学研究所任研究实习员。陈景润来北京后工作环境大为改进，研究工作也取得长足进步。60年代初，他在华林问题、圆内整点问题、球内整点问题与除数问题上接连取得进展。这些工作比起他在厦门大学的处女作，上了一个新的台阶。

可惜在"拔白旗，插红旗"运动中，陈景润作为顽固的"小白旗"典型被调到科学院东北分院的大连化学所。直到几年后"落实政策"，才调回数学所。但是他对哥德巴赫猜想的研究一直没有间断。

在参加哥德巴赫猜想攻坚战的队伍中，还有两位中国数学家值得一提。一位是华罗庚的亲密助手和数论方面的继承人王元。王元参加了华罗庚主持的"哥德巴赫猜想"讨论班。他在1957年春，证明了（2，3），并且在广义黎曼猜想成立的前提下，证明了（1，3）$_R$。这个结果得到华罗庚的赞赏。另一位是潘承洞（1934-1997），潘承洞1956年毕业于北大数学系，是导师闵嗣鹤的一名研究生。1960年分配到山东大学，继续从事哥德巴赫猜想的研究。1962年潘承洞证明了（1，5）。这一结果使华罗庚感到由衷的喜悦。

1965年，陈景润宣称在广义黎曼猜想下证明了（1，2）$_R$。在关肇直的支持下，陈景润的文章总算赶在停刊前刊登在1966年《科学通报》上。后来大家见到邦别里[①]1965年的文章，其结果可以替换广义黎曼猜想。因此陈景润实际上已经证明了（1，2）。但是，对这个证明（1，2）的摘要，国外并没有人真正相信。他们认为用筛

① 恩里科·邦别里（1940-　）是意大利数学家，在数论、微分几何、群论诸方面均有重要成就，1974年获菲尔兹奖。

法最多只能证明（1，3），因此没有引起重视。

遗憾的是，当时“文化大革命”的风暴正横扫中国大地。陈景润因为“坚持资产阶级反动立场”研究“古人、洋人、死人”而受到批判，一度被关进“牛棚”。他住的是原设计做锅炉房的一间只有6平方米的小房间。生活的困难可以克服，难以忍受的是，随时随地还可能被粗暴地拉出去批斗，遭受各种无端的侮辱和指责，甚至打骂。有一次，陈景润一时想不开，由中关村88号楼的三层楼跳下。幸好二楼的窗前有一块平台，他的人落在了平台上，保住了性命，只是腿部跌青了一大块。最为难得也是最令人感动的是，即使在这样险恶条件下陈景润始终顽强地废寝忘食地坚持研究，从不间断。有一天晚上王元有急事去找他，推开房门，陈景润正在埋头研究。看到王元进来，他慌忙掩饰说，自己正在听广播，并没有在搞研究。因为“搞研究”在当时是严重的罪名。王元一看表，这时已是凌晨二时了！

华罗庚很少评价他的学生。因为他有那么多的学生，评价一个，就难免挂一漏万。但是，他曾私下向王元说过，“在我的学生的工作中，最使我感动的是（1，2）。”当王元提起他学生的其他一些纯粹数学成果时，华罗庚重复了一句：“最使我感动的是（1，2）。”

其实何止是华罗庚呀，全中国以至全世界都会对陈景润的钻研精神和他的惊人成果所深深感动并肃然起敬。多少人在一次次不容有丝毫申辩的咄咄逼人的批判斗争中改变了生活的方向，放弃或中断了自己的理想和追求。但是，陈景润不愧为中国杰出知识分子的代表，始终坚持自己的工作、目标和信念、毫不动摇，决不屈服。具有讽刺意味的是，当陈景润的成果得到举世公认时，那些当年的打手和吹鼓手们，摇身一变，争先恐后地吹捧起陈景润来。他们翻手为云，覆手为雨，俨然成了陈景润的保护神，真不知天下还有“羞耻”二字。

“林彪事件”后，全国有部分学术杂志恢复出版。1972年，陈景润将他的（1，2）证明全文投交《中国科学》，由闵嗣鹤和王元

审核。这时他已把1965年的证明作了很大简化，并且采用了邦别里的结果。最熟悉这个问题的是王元和潘承洞，但那个时候彼此都不敢来往。王元只好直接找陈景润。陈景润一连讲了三整天，仔细推敲了每一个细节，王元最后确信（1，2）证明无误。但是，王元当时是一个“有案在身”的所谓反革命小集团的成员，而“哥德巴赫猜想”的研究又是一个受到严厉批判的典型，因此在“审查意见”上怎样写，颇费一番思量。为“明哲保身”，可以含糊其辞，待形势明朗后再说。可是，眼看着为中华民族争光的数学成果就这样被埋没掉实在于心不忍。于是王元明确写下：“未发现证明有错误。”闵嗣鹤也支持发表。于是1973年陈景润的（1，2）的证明全文发表。这个结果引起了轰动。1974年哈贝斯坦与黎切特合著的《筛法》中，将（1，2）的证明列为该书的最后一章，题目是“陈氏定理”。这一章开始时这样写道：

“我们本章的目的是为了证明陈景润下面的惊人定理，我们是在前十章已经付印时才注意到这个结果的，从筛法的任何方面来说，它都是光辉的顶点。”

1982年10月，陈景润、王元和潘承洞的“哥德巴赫猜想研究”获第二届国家自然科学一等奖。

中国数学家离摘下这颗王冠上的明珠只有一步之遥了。但是，这将是艰难的一步。依靠原有的筛法已远远不够了。

我不能在干扰中躺倒不干

反右以后，华罗庚处在挨批判与靠边站的地位，与建国初期有职有权，踌躇满志的情况大不一样了。华罗庚不无遗憾地说：“1957年以前，我的研究工作是一个高峰接着一个高峰，1957年以后就断掉了，很可惜。”

1957年反右运动开始，华罗庚不时遭到批判。要继续研究纯粹数学，越来越困难了。第二年中国科学技术大学成立。华罗庚出任

应用数学系主任，他的工作逐渐由数学所转向科大。第一届新生由华罗庚亲自教授。他把所有的大学数学基础知识融合成一个整体，而不按传统的分科方法来讲。这种“一条龙”的教学法由华罗庚统一筹划，由王元和龚升分头组合来教。从结果来看，华罗庚花的力气不少，效果并不明显。同年，华罗庚和王元受苏联《科学通报》上一篇有关数论在多重积分中的应用的启发，利用计算机模拟手段，在高维数值积分的研究取得进展。华-王方法受到国际的重视，并于1976年写出专著《数论在近似分析中的应用》。1981年英文版出版，受到同行的普遍征引和好评。华罗庚和王元的这项工作获得陈嘉庚科学物质奖。这是研究应用数学的较成功的例子。

1960年，华罗庚从几何学角度出发，研究了混合型偏微分方程。“文革”结束后写出《从单位圆谈起》——高等分析背景一书，1981年英文版出版。

1964年，华罗庚提出辞去数学所所长。科学院同意将他的人事关系转到科大，但仍挂名数学所所长。

1966年“文化大革命”席卷中国大地。作为“资产阶级反动大学阀”的华罗庚接踵而来的是大字报、批斗会和抄家。他往日的弟子，有的调走，有的隔离，有的靠边，一个个“出了问题”。在这种情况下，继续公开地搞理论研究是不可能了，他积极寻找为经济建设服务的途径。他立下誓言：我不为个人，而为人民服务，我不能在干扰中躺倒不干！

他想到了应用数学中的运筹学和优选学。运筹学是研究用科学方法来决定在资源不充分的情况下，如何最好地设计人-机系统并使之最好地运行。而优选学是研究如何迅速合理地寻求在科学试验、工程设计、生产工艺的最优方案。它们都有广阔的应用领域。为了普及推广，他先后写出了《统筹法平话》、《优选法平话》和《优选学》。

从1965年2月开始，华罗庚带领科大年轻人陈德泉、计雷等组成的“普及双法小分队”，风尘仆仆来到工厂、农村、部队、矿山，

足迹遍及大江南北、长城内外。深入实际，深入群众，搞调查研究，提出解决方案。这些工作费时短，见效快，又锻炼了群众，受到欢迎。那时候，华罗庚的身体还很好。一天紧张地跑七八个厂，上午四个厂，下午三四个厂，晚上仍然坚持搞理论研究。有时候半夜一二点钟还把助手找来讨论问题。

华罗庚本以为这样或许可以摆脱“造反派”的纠缠。可是这一希望也落了空。科学院“造反派”的头头要求小分队回北京整顿。组织大家批判华罗庚的“资产阶级思想”，和华罗庚划清界线。

1975 年 9 月，华罗庚应黑龙江省的邀请率小分队前往“普及双法”。吴筱元劝华罗庚，“你年纪大了，不要去了。”华罗庚没有答应。这时小分队的人数已由原来的 100 多人减少了三分之二以上，留下来的却有二机部的两个造反派成员，继续捣乱。华罗庚心绪受到影响。一天晚上，大家都去看电影了，华罗庚一人留在招待所房间里。他突然胸闷难受，大汗淋漓，却无力叫喊。他只好用脚拼命敲打床沿。服务员推开门一看吓得大哭。立即请来的医生诊断为心肌梗塞。经此大病，华罗庚的健康大不如前了。

春回大地

1976 年，历时 11 年的“文化大革命”终于落下帷幕。全国人民为之长长舒了一口气。

春回大地，百废待兴。

摆在华罗庚面前有太多的事要做，要恢复中国数学会的活动把纯粹数学与数学普及继续搞起来；要走出去，请进来开展国际学术交流……首先要为受迫害的科学家正名，伸张正义。他已全然忘却自己年迈体残的身躯，要把失去的时间补回来。他慨然写了一首诗来抒发自己的情怀：

藏拙保身我所憎，

愿将涓滴献人民，

生产如能长一寸，

何惜老病对黄昏。

当胡耀邦为落实政策征求华罗庚的意见时，华罗庚不谈自己，首先想到了恩师熊庆来。1969年2月3日，熊庆来白天还在写“检查”，不料到晚上，大喊一声猝然去世。华罗庚全然不顾自己当时所受到的巨大压力和熊家的婉劝，立即赶往八宝山。面对骨瘦如柴的遗体，他百感交集，失声痛哭。对恩师的感激与自己的无奈和抱憾，随着眼泪一涌而出。

1978年熊庆来教授骨灰安放仪式在八宝山革命公墓礼堂隆重举行，他是首批被正式平反的科学家之一。

同年全国数学竞赛活动恢复。

第二年他重访英国。接着两度访问美国。在进行学术交流的过程中，会见了老朋友，结交了新朋友。

1984年中国数学界的领导完成新老交替。中国数学会吴文俊任理事长，王元出任数学所所长，杨乐为副所长。

华罗庚把更多的精力放在应用数学上，工作重心由普及数学方法转向为国民经济提供咨询。他的工作表明“现实世界中数学的应用，需要多少最高质量的创造性与智慧力量！”“实际问题永恒的存在与理论问题一样，会给数学家以丰富的源泉。日常问题对纯粹数学家来说亦具有挑战性的启发。”

1983年斯普林格出版了华罗庚的四部专著，西德驻华使馆专门举行仪式，将《华罗庚论文选集》送给华罗庚本人。接着上海教育出版社在北京科学会堂举行仪式，将该社出版的《华罗庚科普著作选集》样书赠送给他。

经过几年的紧张工作，华罗庚欣慰地看到，生活正重新走上正确的轨道。他多么希望自己能为这个事业多尽一份心多出一份力啊。但是，时光不留情。华罗庚已年逾古稀。长期不知疲倦超负荷地工作，给心脏造成过重的负担。他的心肌梗塞又多次发作。他感到留给自己的时间不多了。1980年4月，他酝酿了遗嘱稿。据见证人回

忆，他的遗嘱稿共五点：

1. 我死后丧事要从简，骨灰撒在家乡金坛县的洮湖中。

2. 我国底子薄、基础差，要提倡多干实事、有益的事，少说空话大话。

3. 发展数学，花钱不多，收益很大，应该多加扶持。

4. 我死后所收藏的图书及期刊，赠送给数学所图书馆。

5. 家庭生活的一些安排（略）。

真是字字千钧，一颗炽热的赤子之心跃然纸上！

1982年，华罗庚收到时任中共中央总书记，一向十分关心知识分子的胡耀邦给他的一封长信，信中语重心长地写道："至于你谈到你今后工作的过重打算，我倒有点不放心。几十年来，你给予人们认识自然界的东西，毕竟超过了自然界赋予你的东西。如果自然界能宽限你更多的日子，我希望你能把你一生为科学而奋斗的动人经历，以回忆录的形式写下来，留给年轻人。"

华罗庚对朋友说："耀邦同志要我写回忆录，唉！叫我怎么下笔呢？"

写回忆录，难住了文思敏捷的华罗庚。是啊，自己一生坎坷还颇多争议，该怎么去写呢？他想：还是让别人，让时间去评价吧！

实际上，国际上对他早有公论：

"对于华罗庚来说，他有很多成就，却没有一个学位。华罗庚的研究领域遍及数论、代数、矩阵几何学、典型群、多复变函数论、调和分析与应用数学，……他可以被选为任何学术团体的会员或任何科学院院士。""是他这个时代的领袖数学家之一"。

华罗庚长期领导中国数学的研究、教学与普及工作，呕心沥血，鞠躬尽瘁。"如果有许多中国数学家现在在科学的新领域中作出特殊的贡献，如果数学在中国享有异常普遍的尊重，那就应归功于作为学者与教师的华罗庚50年来对他的国家的数学事业所作的贡献"。

"人们可能会设想，如果他留在西方，他将可能完成更多的个

人研究计划。然而如果这样做，他就不可能如他最后30年所做的，在中国发展数学及其应用中起到中心作用”。华罗庚很重视普及数学，使他在中国广大青少年和工人中也享有盛誉。因此，“比起历史上任何一位数学家来，受他直接影响的人可能更多”。

毫无疑问，华罗庚是一位数学奇才，一位传奇式的数学家，是我国第一流的科学巨人。他对中国数学所做的巨大贡献，炎黄子孙将永远铭记。

最后时刻

1985年6月3日，华罗庚应日本亚洲协会的邀请前往日本访问。访问中，只安排华罗庚作一次报告，内容是回顾50年代开始的后半生工作。华罗庚常说：“好汉不念当年勇”，过去的成就已经过去，要抓紧现在着眼未来。这一次却要回顾50年代以来的工作，这是好的征兆吗？6月9日，从箱根回到东京。为了准备报告，接连两天他闭门谢客。三十五年风风雨雨，一幕幕往事历历在目，有激动和喜悦，也有无奈和苦恼。他心潮起伏，辗转反侧。服了安眠药，才勉强稍睡片刻。

12日下午2时，他到达日本学士院与日本数学界的院士们会见，互赠各自的著作，在留言簿上写下了最后的手迹：十分荣幸地来访问日本学士院，祝两国科学交流日益繁荣。

下午4时，华罗庚手持拐杖，在日本数学会会长小松彦三郎的陪同下走进东京大学的报告厅。会场响起热烈的掌声。4时12分，华罗庚离开轮椅开始演讲。华罗庚用中文讲，由翻译译成日语。这样进行比较费时，华罗庚征求大家的意见，“能不能用英语直接讲？”大家热烈鼓掌。华罗庚改用英语演讲。效果更好了。讲着讲着他就大汗淋漓了。先脱掉西装，接着领带也解掉了。他看了一下表，规定的45分钟到了。他征求大家的意见能不能再延长几分钟。大家热烈鼓掌。他又讲了十几分钟。最后，华罗庚说了一句：“谢

谢大家。”

在暴风雨般的掌声中，他坐了下来。他的朋友白鸟富美子女士捧着一束鲜花向讲台走去，准备向他献花。在这时，华罗庚突然从椅子上滑下来。在场的医生和教授惊叫着前去扶他。他紧闭着眼睛，面呈紫色，完全失去了知觉。经多次抢救无效，晚上 8 时 27 分，一颗伟大的心脏停止了跳动。

人们深深挚爱和崇敬的一代宗师华罗庚与世长辞了！

再版后记

承蒙读者和出版、教育、科普各方面朋友的关爱，本书得以由开明出版社再版。我们感谢中国青年出版社初版时诸多师友的帮助；更缅怀故去的江泽涵先生、刘宇廉先生。我们衷心感谢陆启铿、王元、姜伯驹、焦向英和晁洪诸位先生对再版的支持和帮助。

初版写作时我们主要参考了 E. T. Bell 的 Men of Mathematics 和 M. Kline 的《古今数学思想》两书。再版中加写了庞加莱、希尔伯特和华罗庚三位数学家，使本书比较完整地反映了世界和中国的数学发展。再版写作时我们主要参考了王元的《华罗庚》、瑞德的《希尔伯特》和庞加莱的《科学的价值》这三本书。我们由衷感激上述五种著作的著译者。

作　者

2004 年 10 月

责任编辑　刘维维

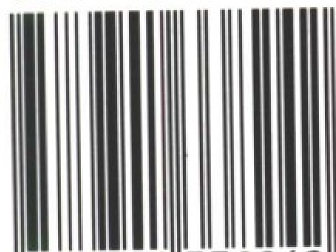
Shuxue

dashiqishilu

本书记叙了数学史上意义重大的人和事。科学技术的发展已经证明，这些人和事对人类影响深远。作者在论述近代数学产生和成长时，对基本概念有精当的说明；注意揭示数学现象之间的内在联系；更强调用数学认识世界服务社会的根本意义。作者对大师们美好人生追求的讴歌，抒发了领略过数学中甘苦的每位数学工作者的心声。数学界热切希望加强普及工作，让公众对数学和数学家有更多的理解和支持，使数学在振兴中华造福人类中发挥更大的作用。

此书再版令人高兴。希望今后对晚近数学家有更多的介绍。

中国科学院院士
第三世界科学院院士　姜伯驹



封面设计　羽人创意设计中心

ISBN7-80133-824-3
定价：20.00元


書
读书中文网
www.rbook.net